МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

А. В. СЯСЄВ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Розділ ”Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи диференціальних рівнянь”

**Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як конспект лекцій**

Дніпропетровськ НМетАУ 2005

УДК 517 (07)

Сясєв А. В. Вища математика. Розділ “Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи диференціальних рівнянь”: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2005. – 44 с.

Містить лекції з дисципліни ”Вища математика” (розділ “Диференціальні рівняння першого порядку. Системи диференціальних рівнянь”).

Викладені основні поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків та систем диференціальних рівнянь; методи їх розв’язування. Наведені докладні розв’язання типових задач з додатковими поясненнями теоретичних положень.

Призначений для студентів усіх спеціальностей.

Бібліогр.: 7 найм.

Друкується за авторською редакцією

Відповідальний за випуск А. В. Павленко, д-р. фіз.-мат. наук, проф.

Рецензенти: Т. С. Кагадій, д-р. фіз.-мат. наук, доц. (НГУ)
Т. І. Рибнікова, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)

ВСТУП

Пропонований конспект лекцій має на меті допомогти студентам усіх спеціальностей, що вивчають курс „Вища математика” оволодіти основами теорії звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків та систем диференціальних рівнянь. Передбачається, що студенти знайомі з основними теоретичними питаннями теорії диференціальних рівнянь першого порядку.

У посібнику викладені основні теоретичні положення теорії звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків та елементарні методи їх інтегрування. Наведенні докладні розв’язання типових задач з додатковими поясненнями теоретичних положень, які були при цьому застосовані.

1. Загальні питання. Теорема про існування та єдиність розв’язку

Звичайне диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0 \qquad (1.1)$$

або ж, коли воно розв’язано відносно старшої похідної, то

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right). \qquad (1.2)$$

Нагадаємо, що будь-яка неперервна і n раз диференційовна на деякому інтервалі функція $y = \varphi(x)$ називається розв’язком рівняння (1.2) або (1.1) на цьому інтервалі, якщо вона перетворює це рівняння в тотожність

$$\varphi^{(n)}(x) \equiv f\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)\right),$$

що виконується для кожного x із зазначеного інтервалу.

Процес знаходження розв’язків диференціального рівняння (1.2), як і у випадку диференціальних рівнянь першого порядку, називають інтегруванням.

Основною задачею для рівняння (1.2) є *задача Коші* – про знаходження розв’язку цього рівняння, що задовольняє початкові умови:

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_0', \;\; ..., \;\; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (1.3)$$

де y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ – відомі числа.

З *геометричної точки зору* розв’язок задачі Коші (1.2), (1.3) – це інтегральна крива, що проходить через точку (x_0, y_0) і має в цій точці значення похідних до $(n-1)$-го порядку включно.

Так, для диференціального рівняння другого порядку задача Коші набуває такий зміст: серед усіх інтегральних кривих цього рівняння знайти ту інтегральну криву, що проходить через задану точку (x_0, y_0) і має в цій точці заданий напрямок дотичної $tg\alpha = y_0'$.

Можна також дати *механічне тлумачення* задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку. Для цього розглянемо рівняння другого порядку $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$, що описує рух матеріальної точки уздовж прямої під дією сили $f(t, x, \dot{x})$. У цьому разі задача Коші полягає в тому, що серед усіх розв'язків розглянутого рівняння, які у цьому випадку називаються рухами, необхідно знайти закон руху $x = x(t)$, який задовольняє початкові умови $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, тобто знайти такий рух, у якому точка, що рухається, у заданий момент часу t_0, знаходилася б у положенні x_0 і мала б задану початкову швидкість $\dot{x}_0$.

Означення. *Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку (1.2) в області D існування та єдиності розв'язку задачі Коші називають n-параметричну сім'ю функцій*

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n), \tag{1.4}$$

яка залежить від x і n довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$ таку, що:

1) для будь-яких припустимих значень сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$ функція (1.4) із зазначеної сім'ї є розв'язком рівняння (1.2), тобто перетворює його в тотожність

$$\varphi^{(n)}(x, C_1, C_2, ..., C_n) \equiv f\left(x, \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n), ..., \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, ..., C_n)\right),$$

що виконується для усіх $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$;

2) для будь-яких початкових умов (1.3) можна так підібрати значення сталих $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$, щоб функція $y = \varphi\left(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0\right)$ із згаданої сім'ї задовольняла початкові умови (1.3).

Якщо маємо співвідношення

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0, \tag{1.5}$$

яке неявно визначає загальний розв'язок, то його називають *загальним інтегралом* рівняння (1.2).

Розв'язки, які дістанемо із загального розв'язку (1.4), надаючи конкретних значень сталим $C_1, C_2, \ldots, C_n$, називаються *частинними розв'язками*.

Якщо права частина рівняння (1.2) є багатозначною функцією, то початкові умови будуть задовольняти кілька розв'язків рівняння (1.2). Будь-який розв'язок, що не міститься в сім'ї загального розв'язку, тобто такий, що його не можна знайти з формули (1.4) ні при яких значеннях сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$, називається *особливим розв'язком* рівняння (1.2).

Як і для диференціального рівняння першого порядку, так і для рівнянь n-го порядку природним і одним з основних є питання: які умови повинна задовольняти права частина рівняння (1.2), щоб задача Коші для даного рівняння мала розв'язок, і цей розв'язок був єдиним.

На це питання відповідає *теорема про існування та єдиність розв'язку* рівняння (1.2) за наявністю початкових умов (1.3).

Теорема: *Якщо права частина рівняння (1.2), тобто функція* $f\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)$ *в замкненій області* D $(n+1)$*-вимірного простору задовольняє умови:*

1) $f\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)$ *є неперервною функцією в області* D *за сукупністю своїх аргументів, отже, обмежена в ній* $\left|f\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)\right|\le M$ *;*

2) $f\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)$ *за всіма змінними, починаючи з другої, задовольняє умову Ліпшиця:*

$$\left|f\left(x,y_1,y_1',...,y_1^{(n-1)}\right)-f\left(x,y_2,y_2',...,y_2^{(n-1)}\right)\right|\le$$
$$\le N\left(\left|y_1-y_2\right|+\left|y_1'-y_2'\right|+...+\left|y_1^{(n-1)}-y_2^{(n-1)}\right|\right),$$

де N *– стала Ліпшиця, а* $\left(x,y_1,y_1',...,y_1^{(n-1)}\right)$ *і* $\left(x,y_2,y_2',...,y_2^{(n-1)}\right)$ *– довільні точки, що належать області* D*, то існує єдиний розв'язок диференціального рівняння (1.2) на відрізку* $x_0-h\le x\le x_0+h$*, де*

$$h=min\left(a,\frac{b}{max\left(M,\left|y'\right|,...,\left|y^{(n-1)}\right|\right)}\right),$$

що задовольняє умови (1.3).

2. Рівняння, що допускають зниження порядку

Рівняння виду

$$y^{(n)}=f(x) \tag{2.1}$$

досить легко інтегрується в квадратурах. Справді, з рівняння (2.1) послідовним інтегруванням одержуємо:

$$y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x}f(x)dx+C_1,\quad y^{(n-2)}=\int_{x_0}^{x}dx\int_{x_0}^{x}f(x)dx+C_1\left(x-x_0\right)+C_2,\ ...,$$

і нарешті

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)dx + \frac{C_1 (x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ \frac{C_2 (x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}(x - x_0) + C_n. \qquad (2.2)$$

Формула (2.2) дає загальний розв’язок рівняння (2.1). При цьому з проміжних формул випливає, що формула (2.2) водночас визначає розв’язок такої задачі Коші – знайти розв’язок рівняння (2.1), який задовольняє початкові умови:

$$y_0(x_0) = C_n, \quad y_0'(x_0) = C_{n-1}, \quad \ldots, \quad y_0^{(n-1)}(x_0) = C_1.$$

Отже, перший член правої частини у формулі (2.2)

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)dx,$$

являє собою частинний розв’язок рівняння (2.1), який разом зі своїми похідними до $(n-1)$-го порядку звертається в нуль при $x = x_0$. Його вигляд можна спростити, якщо скористатися формулою

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(z)dz = \int_{x_0}^{x} (x - z) f(z)dz,$$

за допомогою якої одержуємо для згаданого частинного розв’язку вираз

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x - z)^{n-1} f(z)dz.$$

Це *формула Коші*, що визначає розв’язок рівняння (2.1), який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Якщо дане рівняння виду

$$F\left(y^{(n)}, x\right) = 0, \qquad (2.3)$$

то розв’язавши його відносно $y^{(n)}$, ми зведемо його до виду (2.1), і всі попередні міркування зберігають силу. Але іноді вдається розв’язати це рівняння в елементарних функціях лише відносно x або, у більш загальному випадку, виразити x і $y^{(n)}$ як функції параметра t. Тоді інтегрування рівняння (2.3) може бути теж зведене до квадратур, вираженим явно. Нехай рівняння (2.3) можна записати в параметричній формі:

$$x=\varphi(t),\quad y^{(n)}=\psi(t).$$

Тоді скориставшись рівністю $dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx$, матимемо

$$dy^{(n-1)}=\psi(t)\varphi'(t)dt,$$

звідси

$$y^{(n-1)}=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C_1 .$$

Отже загальний розв'язок рівняння (2.3) записується в параметричній формі так:

$$x=\varphi(t),\quad y=\underbrace{\iiint\ldots\int}_{n}\psi(t)\varphi'(t)dt\ldots dt+C_{n-1}t^{n-1}+\ldots+C_n .$$

Приклад: Розв'язати рівняння $e^{y''}+y''=x$.

Розв'язання. У параметричній формі дане рівняння можна записати так

$$x=e^t+t,\quad y''=t.$$

Тоді

$$y'=\int t(e^t+1)dt=te^t-e^t+C_1+\frac{t^2}{2},\qquad y=te^t-2e^t+C_1t+\frac{t^3}{6}+C_2 .$$

Рівняння, яке не містить явно невідомої функції. Нехай диференціальне рівняння n-го порядку не містить явно невідомої функції y. Для загальності припустимо, що воно не містить також її $(k-1)$ перших похідних y', …, $y^{(k-1)}$, і нижча похідна, яка явно входить у рівняння, є $y^{(k)}$ $(1\le k\le n-1)$.

При зроблених припущеннях рівняння має вигляд

$$F\left(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ldots,y^{(n)}\right)=0. \qquad (2.4)$$

Поклавши в рівнянні (2.4) $y^{(k)}=z$, прийдемо до рівняння

$$F\left(x,z,z',\ldots,z^{(n-k)}\right)=0 \qquad (2.5)$$

порядку $(n-k)$, тобто порядок знижений – замість рівняння n-го порядку ми одержали рівняння порядку $n-k<n$.

Так, наприклад, для рівняння другого порядку $F(y',y'',x)=0$ – заміна $y'=z$, зводить його до рівняння першого порядку $F(z,z',x)=0$.

Загальний інтеграл рівняння (2.5) матимемо вигляд

$$\Phi\left(x,z,C_1,C_2,\ldots,C_{n-k}\right)=0,$$

або

$$\Phi\left(x,y^{(k)},C_1,C_2,\ldots,C_{n-k}\right)=0. \qquad (2.6)$$

Рівняння (2.6), що містить $(n-k)$ довільних сталих, називають проміжним інтегралом рівняння (2.4). При цьому рівняння (2.6) належить до типу (2.3), тобто інтегрується у квадратурах і, розв'язуючи його, ми знайдемо загальний інтеграл рівняння (2.4). Якщо $k = n$, ми безпосередньо маємо вже розглянуте нами рівняння (2.3).

Приклад. Проінтегрувати рівняння $y'' - xy''' + y'''^3 = 0$.

Розв'язання. Це рівняння відноситься до типу (2.4), тобто знизимо порядок, застосовуючи заміну $y'' = z$, тоді $y''' = z'$ і рівняння буде мати вигляд

$$z - xz' + z'^3 = 0.$$

Це рівняння першого порядку нерозв'язане відносно похідної (рівняння Лагранжа). Розв'язуємо його методом введення параметра:

$$z' = p, \quad z = xp - p^3.$$

Диференціюємо по x (z і p функції x):

$$z' = p + xp' - 3p^2 p' \text{ або } p'\left(x - 3p^2\right) = 0.$$

Звідси $\dfrac{dp}{dx} = 0$ або $p = C_1$, тобто маємо розв'язок рівняння Лагранжа (проміжний інтеграл)

$$z = xC_1 - C_1^3.$$

Оскільки $z = y''$, маємо $y'' = xC_1 - C_1^3$, тоді

$$y' = \frac{x^2}{2}C_1 - C_1^3 x + C_2.$$

Остаточно загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y = \frac{x^3}{6}C_1 - \frac{C^3{}_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Рівняння, яке не містить явно незалежну змінну. Нехай рівняння (1.1) не містить явно x, тобто має вигляд

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{2.7}$$

У цьому разі ми застосуємо таку заміну змінних: як нову невідому функцію вводимо $p = y'$; за незалежну змінну приймемо y, тобто $p = p(y)$. Обчислимо в цьому припущенні похідні різних порядків функції y:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d\left(p\dfrac{dp}{dy}\right)}{dy}\frac{dy}{dx} = p\left[p\frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right] = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2.$$

Таким чином, друга похідна від y по x виражається через p і $\dfrac{dp}{dy}$, третя похідна виражається через p і його похідні не вище другого порядку. Методом повної індукції можна показати, що $\frac{d^k y}{dx^k}$ виражається через p, $\frac{dp}{dy}$, ..., $\frac{d^{(k-1)}p}{dy^{(k-1)}}$... Підставляючи вирази для y'', y''', ..., $y^{(n)}$ у нових змінних, у рівняння (2.7), одержимо нове диференціальне рівняння порядку $(n-1)$

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{(n-1)}p}{dy^{(n-1)}}\right) = 0. \qquad (2.8)$$

Інтегруючи рівняння (2.8), будемо мати його загальний інтеграл у вигляді

$$\Phi(y, p, C_1, ..., C_{n-1}) = 0 \text{ або } \Phi\left(y, \frac{dy}{dx}, C_1, ..., C_{n-1}\right) = 0,$$

який є проміжним інтегралом для рівняння (2.7) і водночас диференціальним рівнянням першого порядку відносно функції y.

Приклад. Розв'язати рівняння $2yy'' + (y')^2 = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння відноситься до типу (2.7).

Робимо заміну $y' = p(y)$, тоді $y'' = p\frac{dp}{dy}$ і рівняння буде мати вигляд

$$2y\frac{dp}{dy} + p = 0$$

– рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Тоді

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{2y}, \quad \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{2y}.$$

Звідси $p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$ (проміжний інтеграл для вихідного рівняння).

Переходимо до змінних x і y:

$$p = y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \sqrt{y}dy = C_1 dx \Rightarrow \frac{2y^{3/2}}{3} = C_1 x + C_2.$$

Остаточно загальний розв'язок запишемо у вигляді

$$y = (C_1 x + C_2)^{2/3}.$$

3. Основні поняття теорії лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків. Лінійні однорідні рівняння

Означення. *Диференціальне рівняння n-го порядку називається лінійним, якщо воно першого степеня відносно шуканої функції y та її похідних y', ... , $y^{(n)}$, тобто має вигляд*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \qquad (3.1)$$

де $a_i(x)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ *та* $f(x)$*– відомі неперервні функції від* x *або сталі, причому* $a_0(x) \neq 0$ *для усіх значень* x *з тієї області, у якій розглядається рівняння (3.1).*

У подальшому будемо припускати, що коефіцієнт $a_0(x) = 1$, якщо ж він не дорівнює одиниці, можна усі члени рівняння поділити на нього, щоб прийти до рівняння у якому коефіцієнт при старшій похідній дорівнює одиниці.

Функція $f(x)$, що стоїть у правій частині рівняння (3.1) називається *правою частиною рівняння*.

Рівняння (3.1) називається *лінійним неоднорідним рівнянням* n*-го порядку* або *рівнянням з правою частиною*. Якщо права частина рівняння (3.1), тобто функція $f(x) \equiv 0$, то рівняння має вигляд

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad (3.2)$$

і називається *лінійним однорідним рівнянням* n*-го порядку*. При цьому, якщо рівняння (3.2) має ті ж коефіцієнти, що і (3.1), то воно називається *відповідним неоднорідному рівнянню (3.1)*.

Позначимо ліву частину рівняння (3.1) через

$$L_n[y] \equiv L[y].$$

Тоді вираз

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x)$$

називають *лінійним диференціальним оператором* n*-го порядку*. Запис $L[y]$ означає застосування до функції y сукупності операцій, вказаних у лівій частині рівняння (3.1) або (3.2).

Лінійний оператор має такі властивості:

1) $L[Cy] = CL[y]$ – однорідність;

2) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$ – адитивність.

Користуючись вказаними властивостями лінійного оператора, можна сформулювати такі твердження відносно розв’язків лінійного однорідного рівняння.

Твердження 1. *Якщо функція* $y = y(x)$ *на деякому інтервалі є розв’язком рівняння (3.2), то розв’язком цього рівняння на тому ж інтервалі є і функція* $y = Cx$*, де* C *– довільна стала.*

Твердження 2. *Якщо функції* $y_1 = y_1(x)$ *та* $y_2 = y_2(x)$ *на деякому інтервалі є розв'язками рівняння (3.2), то розв'язком цього рівняння на тому ж інтервалі є і функція* $y = y_1(x) + y_2(x)$.

З цих тверджень випливає наступна теорема.

Теорема 1. *Якщо на деякому інтервалі функції* $y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n$ *є розв'язками лінійного однорідного диференціального рівняння (3.2), то їх лінійна комбінація*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \tag{3.3}$$

де C_i *– довільні сталі, також є розв'язком рівняння (3.2) на тому ж інтервалі.*

Оскільки розв'язок (3.3) містить n довільних сталих, то цілком природним виникає питання: чи буде він загальним розв'язком рівняння (3.2)? Відповідь на це питання пов'язана з поняттям лінійної залежності функцій.

Лінійна залежність функцій.

Означення. *Функції* $y_1(x),\ y_2(x),\ \dots,\ y_n(x)$ *називаються лінійно залежними на деякому інтервалі, якщо існують сталі величини* $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n$ *такі, що на тому ж інтервалі*

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0,$$

при цьому хоч одна з величин $\alpha_i \neq 0$ $(i = 1,2,\dots,n)$. *Якщо ж тотожність виконується тільки за умови, що* $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, *то функції* $y_1(x)$, $y_2(x),\ \dots,\ y_n(x)$ *називаються лінійно незалежними на цьому інтервалі.*

У більш загальному випадку, що стосується лінійної залежності, мають місце такі твердження.

Теорема 2. *Якщо функції*

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \dots,\ y_n(x), \tag{3.4}$$

що мають в інтервалі (a,b) *похідні до* $(n-1)$*-го порядку включно, лінійно залежні, то визначник*

$$W(x) = W(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

на цьому інтервалі тотожно дорівнює нулю.

Даний визначник називають *детермінантом (визначником) Вронського,* побудованим для системи функцій (3.4).

Зауваження. *Згідно з теоремою 2, якщо* $W(x) \neq 0$ *хоча б в одній точці інтервалу* (a,b), *то функції (3.4) лінійно незалежні на* (a,b).

Теорема 3. *Якщо лінійно незалежні функції* $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ *є розв'язками лінійного однорідного диференціального рівняння (3.2) на відрізку* $a \le x \le b$, *то визначник Вронського, побудований для цих функцій, у кожній точці відрізка* $a \le x \le b$ *не дорівнює нулю.*

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

Теорема 4. *(Про структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння.) Загальним розв'язком на відрізку* $a \le x \le b$ *лінійного однорідного диференціального рівняння (3.2) з неперервними коефіцієнтами* $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ *є лінійна комбінація*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) \tag{3.5}$$

з n *лінійно незалежних на тому ж відрізку частинних розв'язків* $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ *рівняння (3.2) з довільними сталими коефіцієнтами.*

Доведення. Щоб довести, що розв'язок (3.5) рівняння (3.2) є його загальним розв'язком, тобто містить всі без виключення частинні розв'язки рівняння (3.2), досить переконатись в тому, що для довільних початкових умов

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{3.6}$$

де x_0 – будь яка точка відрізку $a \le x \le b$, знайдуться такі значення сталих C_1, C_2, ... , C_n, що розв'язок (3.5) задовольняє умови (3.6).

Для знаходження згаданих сталих C_1, C_2, ... , C_n, скориставшись початковими умовами (3.6), дістанемо систему

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x_0) = y_0,\\
&\sum_{i=1}^{n} C_i y'_i(x_0) = y'_0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},
\end{aligned}$$

визначником якої є визначник Вронського, побудований для n лінійно незалежних розв'язків рівняння (3.2). Отже, ця система має відмінний від нуля розв'язок при будь-якому x_0 з відрізка $a \le x \le b$ та довільній правій частині. *Теорему доведено.*

Із сформульованої теореми, а також з теореми про існування та єдиність розв'язку випливає, що найбільша кількість лінійно незалежних частинних розв'язків однорідного лінійного диференціального рівняння дорівнює його порядку.

Означення. *Довільні n лінійно незалежні частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку, називаються його фундаментальною системою розв'язків.*

Таким чином, щоб побудувати загальний розв'язок однорідного рівняння (3.2), досить знайти фундаментальну систему розв'язків цього рівняння. Тоді лінійна комбінація цієї системи і буде загальним розв'язком.

Теорема 5. *Для всякого лінійного однорідного диференціального рівняння існує фундаментальна система розв'язків.*

4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку. Метод варіації довільних сталих

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння. Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку у вигляді

$$L[y] \equiv y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \tag{4.1}$$

де $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – задані і неперервні на $[a;b]$ функції.

Лінійне однорідне рівняння з тими ж коефіцієнтами, але з правою частиною, яка дорівнює нулю,

$$L[y] \equiv y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{4.2}$$

називається, як було зазначено вище, однорідним рівнянням, відповідним неоднорідному рівнянню (4.1). Тоді відносно загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 6 *(про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку). Загальним розв'язком $y_{зн}(x)$ лінійного неоднорідного рівняння (4.1) є сума будь-якого його частинного розв'язку $y_{чн}(x)$ і загального розв'язку $y_{зо}(x)$ відповідного однорідного рівняння (4.2), тобто*

$$y_{зн}(x) = y_{чн}(x) + y_{зо}(x), \quad y_{зо}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

або

$$y_{зн}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_{чн}(x), \tag{4.3}$$

де $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – як і раніше, частинні розв'язки однорідного рівняння (4.2).

Доведення. Справді,

$$L\left[y_{зн}(x)\right] = L\left[C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_{чн}(x)\right] =$$
$$= C_1 L\left[y_1(x)\right] + C_2 L\left[y_2(x)\right] + L\left[y_{чн}(x)\right]. \tag{4.4}$$

Оскільки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ це частинні розв'язки однорідного рівняння (4.2), а $y_{чн}(x)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (4.1), то звідси випливає, що $L[y_1(x)] = 0$, $L[y_2(x)] = 0$ і $L\lfloor y_{чн}(x)\rfloor = f(x)$. Отже, з (4.4) матимемо

$$L\lfloor y_{зн}(x)\rfloor = 0 + f(x) \equiv f(x),$$

тобто $y_{зн}(x)$ – розв'язок рівняння (4.1).

Якщо $y_{зн}(x)$ є довільним розв'язком рівняння (4.1), то

$$L\lfloor y_{зн}(x) - y_{чн}(x)\rfloor = L\lfloor y_{зн}(x)\rfloor - L\lfloor y_{чн}(x)\rfloor = f(x) - f(x) = 0,$$

і, таким чином, $y_{зн}(x) - y_{чн}(x)$ є розв'язком однорідного рівняння (4.2). Тоді існують такі числа C_1 і C_2, що

$$y_{зн}(x) - y_{чн}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

тобто для цих чисел виконується рівність (4.3).

Отже, кожний розв'язок рівняння (4.1), який задовольняє довільні початкові умови, можна дістати з функції (4.3), яка, таким чином, є загальним розв'язком рівняння (4.1). *Теорему доведено.*

При знаходженні частинних розв'язків лінійного неоднорідного диференціального рівняння (4.1) доцільно мати на увазі таку теорему.

Теорема 7 *(про накладання розв'язків). Частинний розв'язок* $y_{чн}(x)$ *рівняння*

$$L[y] \equiv y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x) + f_2(x) \tag{4.5}$$

можна подати у вигляді суми

$$y_{чн}(x) = y1_{чн}(x) + y2_{чн}(x), \tag{4.6}$$

де $y1_{чн}(x)$, $y2_{чн}(x)$ *– відповідно розв'язки рівнянь*

$$L[y] = f_1(x) \text{ і } L[y] = f_2(x).$$

Доведення. Справді, оскільки

$$L\lfloor y1_{чн}(x)\rfloor = f_1(x), \quad L\lfloor y2_{чн}(x)\rfloor = f_2(x),$$

то додаючи ці рівності, дістаємо

$$L\lfloor y1_{чн}(x)\rfloor + L\lfloor y2_{чн}(x)\rfloor = f_1(x) + f_2(x),$$

або

$$L\lfloor y1_{чн}(x)\rfloor + L\lfloor y2_{чн}(x)\rfloor = L\lfloor y1_{чн}(x) + y2_{чн}(x)\rfloor = L\lfloor y_{чн}(x)\rfloor = f_1(x) + f_2(x).$$

Отже, сума (4.6) є розв'язком рівняння (4.5). *Теорему доведено.*

Наприклад, нехай задано рівняння

$$2y'' - y' + 3y = 3 + 4e^x.$$

Якщо рівняння

$$2y'' - y' + 3y = 3 \text{ і } 2y'' - y' + 3y = 4e^x$$

мають частинні розв'язки $v_1(x) = 1$ та $v_2(x) = e^x$ відповідно, то функція

$$v(x) = 1 + e^x$$

є частинним розв'язком заданого рівняння.

Метод варіації довільних сталих. Нехай маємо загальний розв'язок однорідного рівняння (4.2) у вигляді

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{4.7}$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ – фундаментальна система розв'язків рівняння (4.2), а C_1, C_2 – довільні сталі.

Шукатимемо розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.1) у формі (4.7), розглядаючи величини C_1 і C_2 не як довільні сталі, а як функції x, які треба визначити так, щоб функція

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \tag{4.8}$$

була загальним розв'язком рівняння (4.1).

Для цього, диференціюючи (4.8) по x, матимемо

$$y' = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x) + C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x).$$

Виберемо тепер $C_1 = C_1(x)$ і $C_2 = C_2(x)$ так, щоб

$$C_1' y_1(x) + C_2' y_2(x) = 0.$$

Тоді y' матиме такий самий вигляд, як і у випадку сталих C_1 і C_2, тобто

$$y' = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x).$$

Диференціюючи ще раз, дістаємо

$$y''(x) = C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x) + C_1' y_1'(x) + C_2' y_2'(x).$$

Підставимо тепер у рівняння (4.1) вираз для y і знайдені вирази для y', y''. Одержимо

$$C_1(x)\left[y_1''(x) + a_1(x) y_1'(x) + a_2(x) y_1(x)\right] +$$
$$+ C_2(x)\left[y_2''(x) + a_1(x) y_2'(x) + a_2(x) y_2(x)\right] +$$
$$+ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x).$$

Множники, що містяться в дужках при $C_1(x)$ і $C_2(x)$, дорівнюють тотожно нулю, оскільки y_1 і y_2 є частинними розв'язками рівняння (4.2), а тому

$$C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x).$$

Таким чином, функція (4.8) буде тоді загальним розв'язком рівняння (4.1), коли функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ задовольнятимуть систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{4.9}$$

Маємо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$. Ця система має єдиний розв'язок, оскільки її визначник – це детермінант Вронського $W(x) \neq 0,\ \forall x \in (a,b)$.

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знайдемо $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$ як відомі функції від x

$$\begin{cases} C_1'(x) = \varphi_1(x), \\ C_2'(x) = \varphi_2(x). \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{cases} C_1(x) = \int \varphi_1(x)\,dx + \tilde{C}_1, \\ C_2(x) = \int \varphi_2(x)\,dx + \tilde{C}_2, \end{cases}$$

де $\tilde{C}_1$ і $\tilde{C}_2$ – дійсні довільні сталі. Підставляючи значення $C_1(x)$ і $C_2(x)$ $C_n(x)$ у (4.8), дістанемо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (4.1)

$$y = \tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2 + y_1 \int \varphi_1(x)\,dx + y_2 \int \varphi_2(x)\,dx. \tag{4.10}$$

У співвідношенні (4.10) перша група доданків, а саме $\tilde{C}_1 y_1 + \tilde{C}_2 y_2$, є загальним розв'язком однорідного рівняння (4.2), решта – частинним розв'язком неоднорідного рівняння (4.1).

Приклад. За допомогою метода варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$, якщо $y_{з\,о}(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Розв'язання. Шукатимемо розв'язок даного рівняння у вигляді

$$y = C_1(x)\sin 2x + C_2(x)\cos 2x, \tag{4.11}$$

де $C_1(x)$ і $C_2(x)$ невідомі функції. Для знаходження цих функцій згідно з методом варіації довільних сталих складемо систему рівнянь виду (4.9)

$$\begin{cases} C_1' \sin 2x + C_2' \cos 2x = 0, \\ 2C_1' \cos 2x - 2C_2' \sin 2x = \dfrac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо $C_1' = \dfrac{1}{2}$, $C_2' = -\dfrac{1}{2} tg 2x$. Інтегруючи, дістаємо

$$C_1(x) = \frac{x}{2} + C_1, \quad C_2(x) = \frac{1}{4} \ln|\cos 2x| + C_2.$$

Підставляючи значення $C_1(x)$ і $C_2(x)$ у (4.11), одержимо загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння у вигляді

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x \cdot \ln|\cos 2x|.$$

5. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

Задача про знаходження загального розв'язку диференціального рівняння досить легко розв'язується для лінійних однорідних рівнянь

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{5.1}$$

де коефіцієнти p і q – дійсні сталі.

Щоб розв'язати це рівняння, треба знайти яку-небудь його фундаментальну систему розв'язків

$$y_1(x),\ y_2(x).$$

Тоді згідно з теоремою про структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (теорема 4, п. 3), загальним розв'язком рівняння (5.1) буде функція

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{5.2}$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Будемо шукати частинні розв'язки рівняння (5.1), користуючись методом Ейлера, у вигляді

$$y = e^{kx}, \tag{5.3}$$

де k – стала, яку потрібно знайти. Підставляючи (5.3) в ліву частину рівняння (5.1), матимемо

$$e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{5.4}$$

Рівняння (5.4) називають *характеристичним рівнянням*, яке відповідає диференціальному рівнянню (5.1). Воно алгебраїчне і, згідно з основною теоремою алгебри, має два корені (з урахуванням кратності кожного з них), серед яких можуть бути як комплексні, так і дійсні. Розв'язавши його, знайдемо два частинних розв'язки рівняння (5.1), що мають вигляд (5.3).

Розглянемо окремо можливі випадки різних коренів характеристичного рівняння (5.4).

1. *Корені характеристичного рівняння (5.4) – числа дійсні різні, тобто*

$$k_1 \neq k_2.$$

У цьому випадку, згідно з формулою (5.3), маємо два частинних розв'язки рівняння (5.1)

$$e^{k_1 x},\ e^{k_2 x}. \tag{5.5}$$

Ці функції лінійно незалежні, тому система функцій (5.5) являє собою фундаментальну систему розв'язків рівняння (5.1). Тоді з формули (5.2) випливає, що загальним розв'язком рівняння (5.1) є функція

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \tag{5.6}$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' + 5y' - 6y = 0$.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння. Для цього достатньо в даному рівнянні замінити похідні різних порядків невідомої функції відповідними степенями k. У результаті матимемо

$$k^2 + 5k - 6 = 0,$$

звідки $k_1 = 1$, $k_2 = -6$. Тоді згідно з формулами (5.5), (5.6) загальний розв'язок даного диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-6x}.$$

2. *Корені характеристичного рівняння (5.4) – числа комплексні спряжені.* Відомо, що коли алгебраїчне рівняння з дійсними коефіцієнтами має комплексний корінь $k_1 = \alpha + i\beta$, то воно має і спряжений з ним корінь $k_2 = \alpha - i\beta$. У цьому випадку у відповідність кореням k_1 і k_2 згідно з (5.5) можна поставити функції

$$e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad e^{(\alpha - i\beta)x}.$$

Скориставшись формулами Ейлера

$$e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi,$$

знайдемо розв'язки

$$y_1 = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right),$$

$$y_2 = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right).$$

Зауважимо, що коли функція $z(x) = u(x) + iv(x)$ є розв'язком рівняння (5.1), то розв'язками будуть також функції $u(x)$ і $v(x)$. Згідно з цим зробимо висновок, що комплексному кореню $k_1 = \alpha + i\beta$ відповідають два дійсних розв'язки рівняння (5.1):

$$y_{11} = e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ і } y_{12} = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

причому вони лінійно незалежні. Спряжений корінь $k_2 = \alpha - i\beta$ також має два дійсних розв'язки, але вони такі самі (з точністю до знака), що й y_{11}, y_{12}.

Отже, парі спряжених комплексних коренів характеристичного рівняння (5.4) відповідає два дійсних частинних розв'язки рівняння (5.1):

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ і } y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (5.1) в цьому разі матиме вигляд

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right).$$

Приклад. Розв'язати рівняння $2y'' - 2y' + 5y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$2k^2 - 2k + 5 = 0$$

має корені $k_1 = \frac{1}{2} + i\frac{3}{2}$, $k_2 = \frac{1}{2} - i\frac{3}{2}$, тобто $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{3}{2}$.

Загальним розв'язком є функція

$$y = e^{x/2}\left(C_1 \cos\frac{3}{2}x + C_2 \sin\frac{3}{2}x\right).$$

3. *<u>Корені характеристичного рівняння (5.4) – числа дійсні кратні (що повторюються), тобто</u>*

$$k_1 = k_2 = k.$$

За формулою (5.3) дістанемо один з частинних розв'язків

$$y_1 = e^{kx}.$$

Шукатимемо другий частинний розв'язок рівняння (5.1) у вигляді

$$y_2 = ze^{kx}, \tag{5.7}$$

де k – корінь характеристичного рівняння; z – нова невідома функція від x, яку треба визначити так, щоб функція (5.7) була розв'язком лінійного однорідного рівняння (5.1).

Для того, щоб підставити функцію (5.7) у рівняння (5.1), обчислимо спочатку її похідні y_2' і y_2'', матимемо

$$y_2' = e^{kx}\left(kz + z'\right), \quad y_2'' = e^{kx}\left(k^2 z + 2kz' + z''\right). \tag{5.8}$$

Підставивши (5.7) і (5.8) у (5.1), одержимо

$$\left(z'' + 2z'k + zk^2\right)e^{kx} + p\left(z' + zk\right)e^{kx} + qze^{kx} = 0,$$

або

$$z'' + \left(2k + p\right)z' + \left(k^2 + pk + q\right)z = 0.$$

Оскільки k – корінь характеристичного рівняння (5.4), то $k^2 + pk + q = 0$ і за теоремою Вієта $2k = -p$, тому $2k + p = 0$ і $z'' = 0$, звідки

$$z = C_1 x + C_2,$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі. Нас цікавить який-небудь розв'язок $z(x) \neq 0$, тому поклавши $C_1 = 1$, а $C_2 = 0$, дістанемо другий частинний розв'язок рівняння (5.1)

$$y_2 = xe^{kx}.$$

Розв'язки y_1 та y_2 – лінійно незалежні, тому загальний розв'язок рівняння (5.1) має вигляд

$$y = e^{kx}\left(C_1 + xC_2\right). \quad (5.9)$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Розв'язання. З характеристичного рівняння

$$k^2 + 6k + 9 = 0$$

знаходимо $k_1 = k_2 = -3$. Отже, загальний розв'язок даного рівняння запишемо за допомогою формули (5.9) у вигляді

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{-3x}.$$

Таким чином, схему інтегрування лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку із сталими коефіцієнтами можна розбити на три етапи.

1. Знаходження відповідного характеристичного рівняння.

2. Знаходження частинних розв'язків диференціального рівняння, які відповідають знайденим кореням характеристичного рівняння, причому

- кожен з дійсних і різних коренів, наприклад k_1, дає частинний розв'язок $e^{k_1 x}$;
- кожна окрема пара комплексних коренів $\alpha + i\beta$ дає два частинних розв'язки $e^{\alpha x} \cos \beta x$ і $e^{\alpha x} \sin \beta x$;
- кожен m-кратний дійсний корінь дає m частинних розв'язків, які можна дістати за допомогою множення частинних розв'язків $e^{k_1 x}$ на 1, x, x^2, ... , x^{m-1};

3. Множення кожного з цих розв'язків на довільну сталу і додавання результатів.

Здобута таким чином сума і буде загальним розв'язком заданого диференціального рівняння n-го порядку із сталими коефіцієнтами, який повністю визначається коренями відповідного характеристичного рівняння.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{(4)} - 2y'' = 0$.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^4 - 2k^2 = 0.$$

Звідси

$$k_1 = k_2 = 0,\ k_3 = \sqrt{2},\ k_4 = -\sqrt{2}.$$

Тоді загальний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{x\sqrt{2}} + C_4 e^{-x\sqrt{2}}.$$

Отже, лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку з сталими коефіцієнтами завжди можна проінтегрувати в елементарних функціях, причому інтегрування зводиться до алгебраїчних операцій.

6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищого порядку із сталими коефіцієнтами із спеціальною правою частиною

Розглянемо неоднорідне диференціальне рівняння

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{6.1}$$

де a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – задані дійсні числа, $f(x) \not\equiv 0$ – задана функція, неперервна на деякому інтервалі (a, b).

Згідно з теоремою 6 (п. 4.), загальний розв'язок рівняння (6.1) являє собою суму його частинного розв'язку і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння ми вже знаходити вміємо, тому розглянемо детальніше питання про знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Насамперед слід зазначити, що частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (6.1) можна знайти в квадратурах методом варіації довільних сталих (п. 4.). Проте для рівнянь з так званою спеціальною правою частиною частинний розв'язок можна знайти значно простіше, не вдаючись до операції інтегрування, наприклад, ***методом невизначених коефіцієнтів***.

Розглянемо деякі з таких рівнянь.

1. *Нехай права частина рівняння (6.1) має вигляд*

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x), \tag{6.2}$$

де α – дійсне число, $P_n(x)$ – многочлен степеня n.

Можливі такі випадки.

- Число α не є коренем характеристичного рівняння

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0. \tag{6.3}$$

Тоді частинний розв'язок диференціального рівняння (6.1) шукатимемо у вигляді

$$y_{\text{ч н}} = e^{\alpha x} Q_n(x),$$

де $Q_n(x)$ – многочлен того ж степеня, що і $P_n(x)$, але в загальному виді, коефіцієнти якого треба визначити, тобто

$$y_{\text{ч н}} = e^{\alpha x}\left(A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0\right), \tag{6.4}$$

де A_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – невизначені коефіцієнти.

Справді, підставляючи функцію (6.4) у рівняння (6.1), скорочуючи на $e^{\alpha x}$ та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, дістанемо систему $n+1$ лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення $n+1$ невідомих коефіцієнтів A_i многочлена $Q_n(x)$.

➢ Число α збігається з одним коренем характеристичного рівняння (6.3), тобто є простим коренем цього рівняння. У цьому випадку частинний розв'язок рівняння (6.1) треба шукати у вигляді

$$y_{\text{ч н}} = xe^{\alpha x}Q_n(x).$$

➢ Число α є коренем кратності $r \le n$, то частинний розв'язок рівняння (6.1) шукатимемо у вигляді

$$y_{\text{ч н}} = x^r e^{\alpha x}Q_n(x). \tag{6.5}$$

Взагалі кажучи: якщо права частина рівняння (6.1) має вигляд (6.2), то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати у вигляді (6.5), де $Q_n(x)$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами того самого степеня, що й многочлен $P_n(x)$, а r – число коренів характеристичного рівняння (6.3), які дорівнюють α.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' + 9y = e^{3x}(54x^2 + 1)$.

Розв'язання. Шукатимемо загальний розв'язок у вигляді

$$y_{з\,н} = y_{з\,о} + y_{ч\,н},$$

де $y_{з\,о}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, $y_{ч\,н}$ – частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння.

Оскільки права частина заданого рівняння належить до спеціального виду (6.2), а саме

$$\alpha = 3, \quad P_n(x) = 54x^2 + 1, \quad n = 2, \tag{6.6}$$

то частинний розв'язок будемо шукати методом невизначених коефіцієнтів у вигляді (6.5). Але спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Характеристичне рівняння $k^2 + 9 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm 3i$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння запишемо у вигляді

$$y_{з\,о} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Тепер знайдемо $y_{ч\,н}$ – частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння. Оскільки згідно з (6.6) $\alpha \ne k_{1,2}$, то $y_{ч\,н}$ шукатимемо у вигляді (6.4), тобто

$$y_{ч\,н} = e^{3x}(Ax^2 + Bx + C),$$

де A, B, C – невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $(y_{ч\,н})'$ та $(y_{ч\,н})''$ і підставивши їх в дане рівняння, дістанемо після зведення подібних членів і скорочення на e^{3x}:

$$18Ax^2 + (18B + 12A)x + (18C + 6B + 2A) = 54x^2 + 1.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 18A = 54, \\ x^1 & 18B + 12A = 0, \\ x^0 & 18C + 6B + 2A = 1. \end{array}$$

Звідси

$$A = 3, \quad B = -2, \quad C = \frac{7}{18}.$$

Отже, маємо частинний розв’язок даного рівняння:

$$y_{о\,н} = e^{3x}\left(3x^2 - 2x + \frac{7}{18}\right).$$

Тоді загальним розв’язком буде функція

$$y_{з\,н} = y_{з\,о} + y_{о\,н} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + e^{3x}\left(3x^2 - 2x + \frac{7}{18}\right).$$

Приклад. Розв’язати рівняння $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}$.

Розв’язання. Як і у попередньому прикладі спочатку знайдемо загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0.$$

Складаємо характеристичне рівняння:

$$k^3 - 5k^2 + 8k - 4 = 0.$$

Його корені $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 2$. Отже, загальний розв’язок однорідного рівняння запишемо у вигляді

$$y_{з\,о} = C_1 e^x + e^{2x}(C_2 + C_3 x).$$

Тепер перейдемо до визначення частинного розв’язку заданого неоднорідного рівняння. Оскільки права частина цього рівняння належить до спеціального виду (6.2), а саме $\alpha = 2$, $P_n(x) = 1$, $n = 0$, то частинний розв’язок шукатимемо у вигляді (6.5). Для даного прикладу $\alpha = 2$ є двократним коренем характеристичного рівняння, тому

$$y_{ч\,н} = Ax^2 e^{2x}.$$

Підставивши останній вираз у задане рівняння, після деяких перетворень аналогічних попередньому прикладу, одержимо

$$A = \frac{1}{2},$$

отже,

$$y_{ч\,н} = \frac{1}{2} x^2 e^{2x}.$$

Тоді остаточно запишемо загальний розв’язок неоднорідного рівняння

$$y_{з\,н} = y_{з\,о} + y_{ч\,н} = C_1 e^x + e^{2x}(C_2 + C_3 x) + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}.$$

Приклад. Розв’язати рівняння $y'' - 2y' + y = 2x + 3$.

Розв’язання. Шукатимемо загальний розв’язок у вигляді

$$y_{з\,н} = y_{з\,о} + y_{ч\,н}.$$

Оскільки права частина заданого рівняння належить до спеціального виду (6.2), а саме

$$\alpha = 0, \quad P_n(x) = 2x + 3, \quad n = 1,$$

то частинний розв’язок будемо шукати методом невизначених коефіцієнтів у вигляді (6.5). Але спочатку знайдемо загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння.

Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 1$, тому загальний розв’язок однорідного рівняння запишемо у вигляді

$$y_{з\,о} = e^{x}(C_1 + C_2 x).$$

Тепер знайдемо частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння. Оскільки $\alpha \neq k_1$, $\alpha \neq k_2$, то за формулою (6.4) $y_{ч\,н}$ шукатимемо у вигляді

$$y_{ч\,н} = Ax + B,$$

де A, B – невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $(y_{ч\,н})' = A$ та $(y_{ч\,н})'' = 0$ і підставивши їх у рівняння, дістанемо

$$-2A + B + Ax = 2x + 3.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях, одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} A = 2, \\ -2A + B = 3, \end{cases}$$

звідки $A = 2$, $B = 7$. Отже, частинний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$y_{ч\,н} = 2x + 7, \tag{6.7}$$

тому

$$y_{з\,н} = y_{з\,о} + y_{ч\,н} = e^{x}(C_1 + C_2 x) + 2x + 7$$

є шуканий загальний розв'язок.

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 10y' + 25y = (2x-1)e^{5x}$ при початкових умовах $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 10k + 25 = 0$, або $(k-5)^2 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 5$.

Отже,

$$y_{з\,о} = e^{5x}(C_1 + C_2 x).$$

Число $\alpha = 5$ є двократним коренем характеристичного рівняння. тоді частинний розв'язок знайдемо у вигляді

$$y_{ч\,н} = x^2 e^{5x}(Ax + B).$$

Підставляючи цей вираз у задане неоднорідне рівняння, після зведення подібних і скорочення на e^{5x}, матимемо

$$6Ax + 2B = 2x - 1.$$

Звідси

$$\begin{cases} 6A = 2, \\ 2B = -1; \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{2}.$$

Отже,

$$y_{ч\,н} = x^2 e^{5x}\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right).$$

Тоді

$$y_{з\,н} = y_{з\,о} + y_{ч\,н} = e^{5x}(C_1 + C_2 x) + x^2 e^{5x}\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right).$$

Визначимо тепер C_1 і C_2, використовуючи задані початкові умови. Маємо

$$y(0) = C_1 = 1, \quad C_1 = 1,$$

$$y'_{зн} = \left[\left(C_2 - x + x^2\right)e^{5x} + \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)5e^{5x}\right]\Bigg|_{x=0} = C_2 + 5C_1, \quad C_2 = 6.$$

Отже,

$$y = \left(1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)e^{5x}$$

і є шуканим розв'язком, або розв'язком задачі Коші.

2. *<u>Нехай права частина в рівнянні (6.1) має вигляд</u>*

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x\right), \tag{6.8}$$

де $P_n(x)$ і $R_m(x)$ – многочлени степенів n і m відповідно, α та β – дійсні числа.

У цьому випадку частинний розв'язок рівняння (6.1)

$$y_{чн} = x^r e^{\alpha x}\left(U_s(x)\cos\beta x + V_s(x)\sin\beta x\right), \tag{6.9}$$

де $U_s(x)$ та $V_s(x)$ – многочлени степеня s з невизначеними коефіцієнтами; s – найвищий степінь многочленів $P_n(x)$ та $R_m(x)$, тобто $s = max(n,m)$; r – число коренів характеристичного рівняння (6.3), які дорівнюють $\alpha \pm i\beta$.

Зокрема, якщо права частина рівняння (6.1) має вигляд

$$f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x, \tag{6.10}$$

де A, B – відомі дійсні числа, то частинний розв'язок цього рівняння треба шукати у вигляді

$$y_{чн} = x^r\left(a\cos\beta x + b\sin\beta x\right), \tag{6.11}$$

де a і b – невідомі коефіцієнти; r – число коренів характеристичного рівняння (6.3), які дорівнюють $i\beta$.

Слід зазначити, що функція (6.2) є окремим випадком функції (6.8) і утворюється з неї при $\beta = 0$.

Зауваження. *Шуканий многочлен $Q_n(x)$ у формулі (6.5), має бути повним, тобто містити всі степені x від 0 до n, незалежно від того, чи є повним заданий многочлен $P_n(x)$. Те саме стосується многочленів $U_s(x)$ та $V_s(x)$ у формулі (6.9), причому невизначені коефіцієнти при одних і тих же степенях x у цих многочленах повинні бути, взагалі кажучи, різними.*

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' + 4y' + 5y = e^{-x}(2\cos x - x\sin x)$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичне рівняння $k^2 + 4k + 5 = 0$ має корені $k_{1;2} = -2 \pm i$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння запишемо у вигляді

$$y_{зо} = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

Права частина даного рівняння $f(x) = e^{-x}(2\cos x - x\sin x)$ є функцією виду (6.8), де $P_n(x) = 2$, $n = 0$, $R_m(x) = -x$, $m = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Крім того, число $\alpha \pm i\beta = -1 \pm i$ не збігається ні з одним із коренів характеристичного рівняння, тому згідно з формулою (6.9) частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_{ч\,н} = e^{-x}\left[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right],$$

де A, B, C, D – невідомі коефіцієнти. Для їх визначення застосуємо метод невизначених коефіцієнтів. Підставляючи $y_{ч\,н}$, $(y_{ч\,н})'$ та $(y_{ч\,н})''$ у задане рівняння, після спрощень одержимо

$$\left[(A + 2C)x + 2A + B + 2C + 2D\right]\cos x + \left[(C - 2A)x - 2A - 2B + 2C + D\right]\sin x = 2\cos x - x\sin x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin x$ і $\cos x$ в лівій і правій частині цієї рівності, одержимо

$$\begin{array}{l|l} \cos x & (A + 2C)x + 2A + B + 2C + 2D = 2, \\ \sin x & (C - 2A)x - 2A - 2B + 2C + D = -x. \end{array}$$

Тепер у кожній з останніх рівностей прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{cases} 2A + B + 2C + 2D = 2, \\ A + 2C = 0, \\ -2A - 2B + 2C + D = 0, \\ -2A + C = -1. \end{cases}$$

Звідси $A = \frac{2}{5}$, $B = -\frac{4}{25}$, $C = -\frac{1}{5}$, $D = \frac{22}{25}$. Тоді

$$y_{о\,н} = e^{-x}\left[\left(\frac{2}{5}x - \frac{4}{25}\right)\cos x + \left(-\frac{1}{5}x + \frac{22}{25}\right)\sin x\right]$$

Отже, загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_{з\,н} = y_{з\,о} + y_{ч\,н} = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^{-x}\left[\left(\frac{2}{5}x - \frac{4}{25}\right)\cos x + \left(-\frac{1}{5}x + \frac{22}{25}\right)\sin x\right].$$

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' + 4y = 5\sin 2x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$ має корені $k_{1,2} = \pm 2i$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $y_{з\,о} = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$.

Права частина даного рівняння $f(x) = 5\sin 2x = 5\sin 2x + 0\cdot\cos 2x$ є функцією виду (6.10), де $A = 0$, $B = 5$, $\beta = 2$. Крім того, число $i\beta = 2i$ збігається з одним із коренів характеристичного рівняння, тому згідно з формулою (6.11) частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_{ч\,н} = x(a\cos 2x + b\sin 2x),$$

де a, b – невідомі коефіцієнти. Знайшовши похідні $(y_{ч\,н})'$ та $(y_{ч\,н})''$ і підставивши в дане рівняння, після спрощень дістанемо

$$-4a\sin 2x + 4b\cos 2x = 5\sin 2x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 2x$ і $\cos 2x$ в лівій і правій частині цієї рівності, одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4a = 5, \\ 4b = 0; \end{cases}$$

звідки $a = -\frac{5}{4}$, $b = 0$. Отже,

$$y_{ч\,н} = -\frac{5}{4} x \cos 2x .$$

Тоді загальний розв'язок даного рівняння матимемо вигляд

$$y_{з\,н} = y_{з\,о} + y_{ч\,н} = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{5}{4} x \cos 2x .$$

Зауваження. *Якщо права частина рівняння (6.1) є сумою декількох різних за структурою функцій виду (6.2) або (6.7), то для відшукання частинного розв'язку треба використати теорему 7 п. 4. та властивість суперпозиції або накладання розв'язків.*

Приклад. Знайти розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = 3e^x + 2x + 3$, який задовольняє початкові умови: $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 1$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$y_{з\,о} = e^x (C_1 + C_2 x).$$

Права частина заданого рівняння є сумою двох різних за структурою функцій

$$f_1(x) = 3e^x \text{ і } f_2(x) = 2x + 3,$$

тому за теоремою 7 п. 4. та властивістю накладання (суперпозиції) розв'язків частинний розв'язок даного рівняння дорівнює

$$y_{ч\,н} = y1_{ч\,н} + y2_{ч\,н},$$

де $y1_{ч\,н}$ та $y2_{ч\,н}$ – частинні розв'язки рівнянь

$$y'' - 2y' + y = 3e^x \text{ та } y'' - 2y' + y = 2x + 3$$

відповідно.

Частинний розв'язок першого з цих рівнянь шукаємо у вигляді

$$y1_{ч\,н} = x^2 A e^x,$$

оскільки $r = 2$ (число коренів характеристичного рівняння, які збігаються з $\alpha = 1$, дорівнює 2). Підставивши $y1_{ч\,н}$, $(y1_{ч\,н})'$ та $(y1_{ч\,н})''$ в перше рівняння, після спрощень знайдемо $A = \frac{3}{2}$, тому

$$y1_{ч\,н} = \frac{3}{2} x^2 e^x .$$

Частинний розв'язок другого рівняння шукаємо у вигляді $y2_{ч\,н} = Ax + B$, звідки і з урахуванням (6.7), маємо

$$y2_{ч\,н} = 2x + 7 .$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$y_{з\,н} = y_{з\,о} + y1_{ч\,н} + y2_{ч\,н} = e^x\left(C_1 + C_2x + \frac{3}{2}x^2\right) + 2x + 7\,.$$

Знайдемо частинний розв'язок, який задовольняє задані початкові умови (розв'язок задачі Коші). Продиференціюємо загальний розв'язок:

$$y'_{з\,н} = e^x\left(C_1 + C_2 + C_2x + 3x + \frac{3}{2}x^2\right) + 2\,.$$

Підставивши в загальний розв'язок і його похідну початкові умови $x = 0$, $y = 3$, $y' = -1$, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + 7 = 3, \\ C_1 + C_2 + 2 = -1; \end{cases}$$

звідки $C_1 = -4$, $C_2 = 1$. Отже, шуканий розв'язок має вигляд

$$y = e^x\left(\frac{3}{2}x^2 + x - 4\right) + 2x + 7\,.$$

Зауваження. *Викладений метод підбору частинного розв'язку рівняння (6.1) (метод невизначених коефіцієнтів) можна застосовувати лише для певних диференціальних рівнянь, а саме для лінійних рівнянь з сталими коефіцієнтами із спеціальною правою частиною виду (6.2) або (6.7). В інших випадках частинний розв'язок треба шукати методом варіації довільних сталих.*

7. Нормальна система диференціальних рівнянь. Загальні питання. Метод виключення невідомих функцій

В найзагальнішому вигляді система звичайних диференціальних рівнянь – це сукупність співвідношень, які виражають залежність між аргументом, шуканими функціями цього аргументу та їх похідними. З самого початку будемо вважати, що кількість невідомих функцій співпадає з кількістю рівнянь. Отже, система звичайних диференціальних рівнянь має вигляд

$$F_i\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(m_k)}\right) = 0 \;\left(i = 1, 2, \ldots, k\right). \quad (7.1)$$

Серед усіх систем виду (7.1) найбільш вивченими є системи рівнянь, які можна розв'язати відносно старших похідних, тобто системи виду

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} = f_1\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(m_k-1)}\right), \\ y_2^{(m_2)} = f_1\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(m_k-1)}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_k^{(m_k)} = f_k\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(m_k-1)}\right). \end{cases} \quad (7.2)$$

Систему диференціальних рівнянь (7.2) називають *канонічною*.

Кожну канонічну систему з k рівнянь виду (7.2) можна перетворити в систему з $n = m_1 + m_2 + ... + m_k$ диференціальних рівнянь, що містять в лівих частинах похідні тільки першого порядку, а праві частини цих рівнянь зовсім не містять похідних. Для цього досить кожну похідну невідомих функцій, за винятком старших, замінити новими невідомими функціями. Розглянемо це на прикладі.

Нехай треба зробити зазначене перетворення для системи рівнянь

$$\begin{cases} y_1^{(4)} = f_1(x, y_1, y_1', y_1'', y_1''', y_2, y_2', y_3, y_3', y_3''), \\ y_2'' = f_2(x, y_1, y_1', y_1'', y_1''', y_2, y_2', y_3, y_3', y_3''), \\ y_3''' = f_3(x, y_1, y_1', y_1'', y_1''', y_2, y_2', y_3, y_3', y_3''). \end{cases} \tag{7.3}$$

Введемо заміну

$$y_1' = y_4, \quad y_1'' = y_5, \quad y_1''' = y_6, \quad y_2' = y_7, \quad y_3' = y_8, \quad y_3'' = y_9,$$

де y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9 – нові невідомі функції.

Тоді систему (7.3) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} y_1' = y_4, \\ y_2' = y_7, \\ y_3' = y_8, \\ y_4' = y_5, \\ y_5' = y_6, \\ y_6' = f_1(x, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9), \\ y_7' = f_2(x, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9), \\ y_8' = y_9, \\ y_9' = f_3(x, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9). \end{cases}$$

Таким чином, як було відзначено вище, ми одержали систему з $n = 4 + 2 + 3 = 9$ диференціальних рівнянь першого порядку.

Отже, у загальному випадку, замість системи (7.2) будемо розглядати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \tag{7.4}$$

яку називають *нормальною*.

Розв'язком системи (7.4) називають довільну впорядковану сукупність функцій

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x), \ldots,\ y_n = y_n(x), \qquad (7.5)$$

що перетворює кожне рівняння системи (7.4) у тотожність.

Для системи (7.4) *задача Коші* формулюється так: знайти невідомі функції (7.5), що задовольняють систему рівнянь (7.4) і задані початкові умови

$$y_1(x_0) = y0_1,\ y_2(x_0) = y0_2, \ldots,\ y_n(x_0) = y0_2.$$

Метод виключення невідомих функцій. Окремим випадком системи (7.2) можна вважати одне диференціальне рівняння порядку n

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right), \qquad (7.6)$$

інтегрування якого вже було розглянуто вище і яке зводиться до нормальної системи диференціальних рівнянь (7.4), згаданим у попередньому пункті способом.

Взагалі кажучи, нормальна система n диференціальних рівнянь першого порядку за допомогою метода виключення невідомих функцій може бути зведена до одного рівняння n-го порядку (7.6) з однією невідомою функцією.

Отже, нехай маємо нормальну систему (7.4). Диференціюючи перше рівняння по x

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}$$

та замінюючи похідні $y_1',\ y_2', \ldots,\ y_n'$ їх виразами $f_1,\ f_2, \ldots,\ f_n$ з інших рівнянь системи (7.4) дістаємо

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n,$$

тобто вираз

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad (7.7)$$

права частина якого є відомою функцією своїх аргументів.

Диференціюючи це рівняння і виконуючи ту саму процедуру, що й раніше, знаходимо

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Продовжуючи далі, дістанемо, нарешті рівняння

$$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Отже, матимемо таку систему

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \tag{7.8}$$

Якщо якобіан

$$\frac{D(f_1, F_2, \dots, F_{n-1})}{D(y_2, y_3, \dots, y_n)}$$

не дорівнює нулю, то з перших $(n-1)$ рівнянь системи (7.8) знайдемо y_2, y_3, ... , y_n, виразивши їх через x, y_1, y_1', y_1'', ... , $y_1^{(n-1)}$:

$$\begin{gathered} y_2 = \varphi_2\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right), \\ y_3 = \varphi_3\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_n = \varphi_n\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right). \end{gathered} \tag{7.9}$$

Підставляючи ці вирази в останнє рівняння системи (7.8), дістанемо рівняння n-го порядку для визначення y_1

$$y_1^{(n)} = \Phi\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right). \tag{7.10}$$

Звідси, інтегруючи, знайдемо y_1:

$$y_1 = \Psi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Диференціюючи цю функцію $(n-1)$ раз, знайдемо похідні y_1', y_1'', ... , $y_1^{(n-1)}$ як функції від x, C_1, ... , C_n. Підставляючи ці функції у вирази (7.9) для y_2, y_3, ... , y_n дістанемо невідомі функції:

$$\begin{gathered} y_2 = \Psi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n); \\ y_3 = \Psi_3(x, C_1, C_2, \dots, C_n); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ y_n = \Psi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{gathered}$$

Таким чином, з самого способу одержання рівняння (7.10) виходить, що коли $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ... , $y_n = y_n(x)$ є розв'язки системи (7.4), то $y_1(x)$ задовольняє рівняння (7.10). Навпаки, якщо маємо розв'язок $y_1(x)$ рівняння (7.10), то за формулами (7.9) зможемо визначити $y_2(x)$, $y_3(x)$, ... , $y_n(x)$. Залишається довести, що ці функції задовольняють систему (7.4).

При наших припущеннях функції $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ перетворюють на тотожності перші $(n-1)$ рівняння системи (7.8), зокрема маємо тотожність

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{7.11}$$

Диференціюючи цю тотожність по x, дістанемо

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}, \tag{7.12}$$

та на підставі (7.7) маємо

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n. \tag{7.13}$$

Віднімаючи (7.13) від (7.12), знаходимо

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\left(\frac{dy_1}{dx} - f_1\right) + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\left(\frac{dy_2}{dx} - f_2\right) + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\left(\frac{dy_n}{dx} - f_n\right) = 0. \tag{7.14}$$

Продовжуючи цей процес, далі матимемо

$$\begin{gathered}
\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\left(\frac{dy_1}{dx} - f_1\right) + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\left(\frac{dy_2}{dx} - f_2\right) + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\left(\frac{dy_n}{dx} - f_n\right) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1}\left(\frac{dy_1}{dx} - f_1\right) + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2}\left(\frac{dy_2}{dx} - f_2\right) + \ldots + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\left(\frac{dy_n}{dx} - f_n\right) = 0.
\end{gathered} \tag{7.15}$$

Враховуючи, що завдяки тотожності (7.11) перші члени всіх рівностей (7.14), (7.15) зникають, і розглядаючи решту одержаних рівностей як систему $(n-1)$ рівнянь з $(n-1)$ невідомими $\dfrac{dy_i}{dx} - f_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$, робимо висновок, оскільки за умовою визначник системи не дорівнює нулю, то мають місце тотожності

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2,\ \frac{dy_3}{dx} = f_3,\ \ldots,\ \frac{dy_n}{dx} = f_n,$$

тобто $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ справді є розв’язком системи (7.4). *Що і треба було довести.*

Отже, при зроблених припущеннях інтегрування одного рівняння n-го порядку (7.6) дає змогу знайти розв’язок нормальної системи рівнянь (7.4). Такий метод інтегрування системи зветься *методом виключення*.

Приклад. Розв’язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y + z + x. \end{cases}$$

Розв’язання. Застосуємо метод виключення невідомих функцій. Диференціюємо перше рівняння системи по x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}.$$

Підставляючи $\dfrac{dz}{dx}$ із другого рівняння, одержимо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + y + z + x.$$

В останнє співвідношення підставляємо z із першого рівняння системи, матимемо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + y + x + \frac{dy}{dx} - y,$$

тобто

$$y'' - 2y' = x.$$

Маємо одне диференціальне рівняння другого порядку відносно однієї невідомої функції $y(x)$, яке не містить явно невідомої функції і допускає зниження порядку, тобто вводимо заміну $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$. Тоді прийдемо до лінійного рівняння відносно функції $p(x)$

$$p' - 2p = x.$$

Розв’язуючи його одним із відомих методів, дістанемо загальний розв’язок у вигляді

$$p = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4} + C_1e^{2x}.$$

Тоді

$$y = -\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}C_1e^{2x} + C_2.$$

Оскільки з першого рівняння заданої системи $z = y' - y$, матимемо

$$z = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}C_1e^{2x} - C_2.$$

Отже, загальний розв’язок даної системи остаточно має вигляд

$$\begin{cases} y = -\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}C_1e^{2x} + C_2, \\ z = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}C_1e^{2x} - C_2. \end{cases}$$

Зауваження. *Від рівняння n-го порядку завжди можна перейти до еквівалентної системи першого порядку, а навпаки, не завжди виконується еквівалентність.*

8. Лінійна однорідна система диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера

Лінійна система диференціальних рівнянь виду

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n , \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n , \end{cases} \tag{8.1}$$

де a_{ij} $\left(i, j = \overline{1,n}\right)$ – сталі величини, називається *лінійною однорідною системою диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами*. Її можна записати у векторно-матричній формі

$$\frac{d\boldsymbol{Y}}{dx} = \boldsymbol{AY}, \tag{8.2}$$

де

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \ldots\ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix}.$$

Для розв’язання системи (8.1) або (8.2), що теж саме, застосуємо *метод Ейлера*. Суть цього метода полягає в тому, що частинний розв’язок системи (8.1) відшукується у вигляді

$$y_1 = \alpha_1 e^{kx},\ y_2 = \alpha_2 e^{kx}, \ldots,\ y_n = \alpha_n e^{kx} \tag{8.3}$$

або в матричній формі

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{kx} \\ \alpha_2 e^{kx} \\ \ldots\ldots \\ \alpha_n e^{kx} \end{pmatrix},$$

тобто

$$\boldsymbol{Y} = \tilde{\boldsymbol{A}} e^{kx}, \quad \tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Підставляючи (8.3) у (8.1), після скорочення на e^{kx} $\left(e^{kx} \neq 0 \ \forall x \in R\right)$, і перенесення членів в одну частину рівняння, дістаємо

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn} - k)\alpha_n = 0, \end{cases} \qquad (8.4)$$

або в матричній формі

$$(\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{E})\tilde{\boldsymbol{A}} = 0 \ (\boldsymbol{E} \text{ – одинична матриця}), \qquad (8.5)$$

або

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{A}} = k\tilde{\boldsymbol{A}}. \qquad (8.6)$$

Для того, щоб система (8.4) (відповідно (8.5)) мала нетривіальний (ненульовий) розв'язок, необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0, \qquad (8.7)$$

або

$$\boldsymbol{A} - k\boldsymbol{E} = 0.$$

Рівняння (8.7) називають *характеристичним рівнянням* системи (8.1). З цього рівняння знаходимо ті значення k, при яких система (8.4) має нетривіальні розв'язки α_i $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Ліва частина рівняння (8.7) є многочленом степеня n змінної k. Відомо, що такий многочлен має n коренів

$$k_1, k_2, \dots, k_n$$

з урахуванням їх кратностей.

Якщо всі *n коренів різні*, то послідовно для кожного k_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ з системи (8.4) знайдемо відповідний нетривіальний вектор

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \dots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}.$$

Згідно з (8.6) маємо, що k_i є власні значення матриці $\boldsymbol{A}$, а вектори $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$ – власні вектори $\boldsymbol{A}$.

Вектори $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, лінійно незалежні, якщо всі власні значення різні. Тому визначник з цих векторів відмінний від нуля.

Зауваження. *Оскільки в n-вимірному просторі не може бути більше ніж n лінійно незалежних векторів, то кожному власному значенню k_i (якщо вони всі різні) відповідає тільки один власний вектор з точністю до сталого множника.*

Таким чином дістаємо n вектор-функцій розв'язків системи (8.1):

$$\boldsymbol{Y}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11}e^{k_1x} \\ \alpha_{21}e^{k_1x} \\ \dots\dots \\ \alpha_{n1}e^{k_1x} \end{pmatrix}, \boldsymbol{Y}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{12}e^{k_2x} \\ \alpha_{22}e^{k_2x} \\ \dots\dots \\ \alpha_{n2}e^{k_2x} \end{pmatrix}, \dots, \boldsymbol{Y}_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1n}e^{k_nx} \\ \alpha_{2n}e^{k_nx} \\ \dots\dots \\ \alpha_{nn}e^{k_nx} \end{pmatrix}, -\infty < x < +\infty. \quad (8.8)$$

Вектор-функції (8.8) утворюють лінійно незалежну систему на інтервалі $(-\infty, +\infty)$, бо її визначник Вронського не дорівнює нулю.

Тому загальний розв'язок системи (8.1) *при різних коренях характеристичного рівняння* (8.7) має вигляд

$$\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^{n} C_i \boldsymbol{Y}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{8.9}$$

де C_i – довільні сталі.

Зауваження. *Система (8.4) для визначення сталих при $k = k_i$ має не єдиний розв'язок, бо її визначник дорівнює нулю, і тому щонайменше одне рівняння є наслідком інших. Довільний розв'язок цієї системи залишається її розв'язком після помноження на сталий множник.*

Для кожної з невідомих функцій загальний розв'язок (8.9) можна ще записати так

$$\begin{cases} y_1(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i \alpha_{1i} e^{k_i x}, \\ y_2(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i \alpha_{2i} e^{k_i x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i \alpha_{ni} e^{k_i x}. \end{cases} \tag{8.10}$$

Приклад. Знайти загальний розв’язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3y + z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y + 2z. \end{cases}$$

Розв’язання. Для розв’язання даної системи застосуємо метод Ейлера, тобто шукатимемо її частинний розв’язок у вигляді $y = \alpha_1 e^{kx}$, $z = \alpha_2 e^{kx}$. Тоді можемо скласти характеристичне рівняння типу (8.7):

$$\begin{vmatrix} 3-k & 1 \\ 2 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \text{ або } k^2 - 5k + 4 = 0.$$

Коренями цього рівняння є $k_1 = 1$, $k_2 = 4$ – числа дійсні різні. Для кореня $k_1 = 1$ складаємо систему (8.4):

$$\begin{cases} (3-1)\alpha_{11} + \alpha_{21} = 0, \\ 2\alpha_{11} + (2-1)\alpha_{21} = 0, \end{cases} \text{тобто} \begin{cases} 2\alpha_{11} + \alpha_{21} = 0, \\ 2\alpha_{11} + \alpha_{21} = 0. \end{cases}$$

Ця система має безліч розв’язків $\alpha_{11} = -\dfrac{\alpha_{21}}{2}$, де α_{11}, α_{21} – залишаються довільними константами. Візьмемо одне з них, наприклад, якщо $\alpha_{21} = 1$, то $\alpha_{11} = -\dfrac{1}{2}$. Тоді кореню $k_1 = 1$ характеристичного рівняння відповідає частинний розв’язок

$$y_1 = -\frac{1}{2}e^x, \; z_1 = e^x.$$

Далі складаємо систему (8.4) для кореня $k_2 = 4$ і знаходимо α_{12}, α_{22}:

$$\begin{cases} -\alpha_{12} + \alpha_{22} = 0, \\ 2\alpha_{12} - 2\alpha_{22} = 0. \end{cases}$$

Оскільки друге рівняння є наслідком першого, то ця система також має безліч розв’язків $\alpha_{12} = \alpha_{22}$. Беремо одне з них $\alpha_{12} = \alpha_{22} = 1$. Тоді кореню $k_2 = 4$ характеристичного рівняння відповідає частинний розв’язок

$$y_2 = e^{4x}, \; z_2 = e^{4x}.$$

Тепер можемо записати загальний розв’язок системи відповідно до (8.10)

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2} C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}, \\ z = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}. \end{cases}$$

Якщо характеристичне рівняння (8.7) має *комплексні корені*, то кожній парі комплексних спряжених коренів $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ будуть відповідати розв’язки

$$y_{j1} = \alpha_{j1} e^{k_1 x}, \quad y_{j2} = \alpha_{j2} e^{k_2 x} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Відомо, що дійсні та уявні частини комплексного розв’язку також є розв’язками. Таким чином, ми дістанемо частинні розв’язки у вигляді

$$\begin{cases} \tilde{y}_{j1} = e^{\alpha x}\left(\lambda_{j1} \cos\beta x + \lambda_{j2} \sin\beta x\right), \\ \tilde{y}_{j2} = e^{\alpha x}\left(\tilde{\lambda}_{j1} \sin\beta x + \tilde{\lambda}_{j2} \cos\beta x\right), \end{cases} \tag{8.11}$$

де $\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \tilde{\lambda}_{j1}, \tilde{\lambda}_{j2}$ – дійсні числа, що визначаються через α_{j1} і α_{j2}.

Відповідні комбінації функцій (8.11) увійдуть в загальний розв’язок системи.

Приклад. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = y - x. \end{cases}$$

Розв’язання. Запишемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-k & 2 \\ -1 & 1-k \end{vmatrix} = 0, \text{ або } k^2 - 4k + 5 = 0.$$

Звідси $k_{1,2} = 2 \pm i$ – числа комплексні спряжені. Тоді цій парі коренів будуть відповідати розв’язки

$$x_1 = \alpha_{11} e^{(2+i)t}, \; x_2 = \alpha_{12} e^{(2-i)t}, \; y_1 = \alpha_{21} e^{(2+i)t}, \; y_2 = \alpha_{22} e^{(2-i)t}.$$

Знайдемо комплексний розв’язок, що відповідає кореню $k_1 = 2 + i$. Підставляючи цей корінь у характеристичне рівняння, одержимо наступну систему для визначення α_{11} і α_{21}:

$$\begin{cases} (1-i)\alpha_{11} + 2\alpha_{21} = 0, \\ -\alpha_{11} - (1+i)\alpha_{21} = 0. \end{cases}$$

Як зазначалося вище, ця система має безліч розв’язків, один з них це

$$\alpha_{11} = -1 - i, \quad \alpha_{21} = 1.$$

Тоді маємо

$$x_1 = -(1+i) e^{(2+i)t}, \quad y_1 = e^{(2+i)t},$$

або

$$x_1 = e^{2t}(\sin t - \cos t) - ie^{2t}(\sin t + \cos t), \quad y_1 = e^{2t}(\cos t + i \sin t).$$

Аналогічно для кореня $k_2 = 2 - i$, матимемо

$$\alpha_{12} = i - 1, \quad \alpha_{22} = 1,$$

тобто

$$x_2 = (i-1)e^{(2-i)t}, \quad y_2 = e^{(2-i)t},$$

або

$$x_2 = e^{2t}(\sin t - \cos t) + ie^{2t}(\sin t + \cos t), \quad y_2 = e^{2t}(\cos t - i\sin t).$$

Частинними розв'язками типу (8.11) заданої системи будуть окремо дійсні та уявні частини:

$$\tilde{x}_1 = e^{2t}(\sin t - \cos t), \quad \tilde{x}_2 = e^{2t}(\cos t + \sin t), \quad \tilde{y}_1 = e^{2t}\cos t, \quad \tilde{y}_2 = e^{2t}\sin t.$$

Загальним розв'язком системи буде

$$\begin{cases} x = e^{2t}[(C_1 + C_2)\sin t + (C_2 - C_1)\cos t], \\ y = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t). \end{cases}$$

Нехай характеристичне рівняння (8.7) має *кратний корінь* k_1 кратності r. Якщо перейти від системи (8.1) до одного рівняння n-го порядку відносно функції $y_1(x)$, то утворене рівняння і система (8.1) будуть мати одне й те саме характеристичне рівняння. Тоді кореню k_1 кратності r відповідає розв'язок рівняння n-го порядку

$$y_1(x) = \left(C_0 + C_1x + \ldots + C_{r-1}x^{r-1}\right)e^{k_1x},$$

де C_0, C_1, ... , C_{r-1} – довільні сталі. Отже,

$$y_1(x) = Q_{1_{r-1}}(x)e^{k_1x},$$

де $Q_{1_{r-1}}(x)$ – многочлен степеня $r-1$.

Аналогічно можна виразити й інші функції $y_i(x)$ у вигляді

$$y_i(x) = Q_{i_{r-1}}(x)e^{k_1x}, \quad i = 2,3,\ldots,n \tag{8.12}$$

де $Q_{i_{r-1}}(x)$ – многочлени степеня $r-1$.

Кожна з функцій $(i = 1,2,\ldots,n)$ задовольняє здобутому диференціальному рівнянню n-го порядку, якими б не були коефіцієнти многочлена $Q_{i_{r-1}}(x)$.

Тепер з многочленів $Q_{i_{r-1}}(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ виберемо такі, щоб відповідні їм функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ були розв'язком системи (8.1). Для цього треба підставити $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ у систему (8.1), скоротити на e^{k_1x} і прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x. Знайдені коефіцієнти залежатимуть від r довільних сталих.

Можна поступити інакше: спочатку взяти многочлен $Q_{1_{r-1}}(x)$ довільним, і тоді коефіцієнти решти многочленів $Q_{i_{r-1}}(x)$, $i = 2,3,\ldots,n$, визначатимуться однозначно через коефіцієнти $Q_{1_{r-1}}(x)$. Проте при цьому іноді можна зайти у суперечність, яка покаже, що деякі коефіцієнти многочлена $Q_{1_{r-1}}(x)$ дорівнюють нулю, і вважати їх довільними не можна.

Таке ж міркування проводять відносно інших кратних коренів (якщо вони є) характеристичного рівняння.

Щоб дістати загальний розв'язок системи (8.1), треба взяти комбінацію усіх розв'язків згідно з (5.31).

Приклад. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь за допомогою метода Ейлера:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ -1 & 4-k \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$k^2 - 6k + 9 = 0.$$

Звідси $k_1 = k_2 = 3$, тобто корінь $k_1 = 3$ має кратність $r = 2$. У цьому випадку ми не зможемо знайти два лінійно незалежних розв'язки даної системи рівнянь у вигляді $x = \alpha_1 e^{3t}$, $y = \alpha_2 e^{3t}$ (два лінійно незалежних розв'язки даного виду не існують). Тому розв'язок системи треба шукати у вигляді (8.12), а саме

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}, \\ y = (A + Bt)e^{3t}. \end{cases}$$

Підставляючи ці функції в систему, дістанемо

$$C_2 + 3C_1 + 3C_2 t = 2C_1 + 2C_2 t + A + Bt,$$

$$B + 3A + 3Bt = 4A + 4Bt - C_1 - C_2 t.$$

Прирівнюючи в першому рівнянні коефіцієнти при однакових степенях t, одержимо

$$A = C_1 + C_2, \quad B = C_2.$$

Друге рівняння має ті самі розв'язки. Отже, загальний розв'язок заданої системи запишемо у вигляді

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}, \\ y = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t}. \end{cases}$$

ПИТАННЯ І ВПРАВИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як знижується порядок у рівнянь, які не містять невідомої функції?
2. Як інтегруються рівняння виду $F\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$?
3. Яке диференціальне рівняння називається лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку?
4. У якому разі систему функцій називають лінійно незалежною на деякому інтервалі?
5. Як формулюється теорема про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку?
6. Що називається фундаментальною системою розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку?
7. Сформулюйте теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку?
8. Як знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння з сталими коефіцієнтами ?
9. Яка система диференціальних рівнянь зветься нормальною? Що таке розв'язок цієї системи?
10. У чому полягає метод виключення невідомих при інтегруванні нормальної системи диференціальних рівнянь?
11. Яку систему диференціальних рівнянь називають лінійною однорідною з сталими коефіцієнтами?
12. Який метод застосовують при інтегруванні лінійних однорідних систем з сталими коефіцієнтами? У чому полягає його суть?
13. Розв'язати рівняння:

а) $y''\left(e^{x} + 1\right) + y' = 0$, відповідь: $y = C_1\left(x - e^{-x}\right) + C_2$;

б) $xy''' = y'' - xy''$, відповідь: $y = C_1(x + 2)e^{-x} + C_2 x + C_3$;

в) $yy'' = (y')^2 - (y')^3$, відповідь: $y + C_1 \ln|y| = x + C_2$, $y = C$;

г) $(y')^2 + 2yy'' = 0$, відповідь: $y^3 = C_1(x + C_2)^2$, $y = C$.

14. Розв'язати рівняння:

а) $y'' - 2y' + y = e^{x}$, відповідь: $y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2\right)e^{x}$;

б) $y'' + 4y = x \sin 2x$,

відповідь: $y = \left(C_1 - \frac{x^2}{8}\right)\cos 2x + \left(C_2 + \frac{x}{16}\right)\sin 2x$;

в) $y'' + y = \sin x - 2e^{-x}$,

відповідь: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - e^{-x} - \frac{x}{2}\cos x$;

г) $y''' + y'' = e^{-x}$, відповідь: $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + x)e^{-x}$.

15. Розв'язати рівняння методом варіації довільних сталих:

а) $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$, відповідь: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{\cos 2x}{2\sin x}$;

б) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$, відповідь: $y = e^x\left(x \ln|x| + C_1 x + C_2\right)$;

в) $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$, відповідь: $y = \left(C_1 + \ln|\sin x|\right)\sin x + (C_2 - x)\cos x$.

16. Методом виключення невідомих функцій розв'язати наступні системи диференціальних рівнянь:

а) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y, \end{cases}$ відповідь: $\begin{cases} x = e^t\left(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t\right), \\ y = e^t\left(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t\right); \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 5x - 3y = 0, \\ \frac{dy}{dt} + 3x + y = 0, \end{cases}$ відповідь: $\begin{cases} x = e^{2t}\left(C_1 + 3C_2 t\right), \\ y = e^{2t}\left(C_2 - C_1 - 3C_2 t\right). \end{cases}$

17. Методом Ейлера розв'язати системи диференціальних рівнянь:

а) $\begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0, \end{cases}$ відповідь: $\begin{cases} x = 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t}, \\ y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y' = 3y - z, \\ z' = 4y - z, \end{cases}$ відповідь: $\begin{cases} y = (C_1 + C_2 x)e^x, \\ z = (2C_1 - C_2 + 2C_2 x)e^x; \end{cases}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.
2. Соколенко О. І. Вища математика. – К.: Академія, 2002. – 432 с.
3. Дюженкова Л.І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Приклади і задачі. – К.: Академія, 2002. – 624 с.
4. Шкіль М. І., Сотніченко М. А. Звичайні диференціальні рівняння. – К.: Вища шк., 1992. – 303 с.
5. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1979. – 128 с.
6. Сорокін А. С., Тітова Л. Д., Холод О. Г. та ін. Диференціальні рівняння. – Дніпропетровськ: ДМетАУ, 1999. – 180 с.
7. Методические указания и контрольные задания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Высшая математика» (раздел «Дифференциальные уравнения») для студентов всех специальностей / Сост.: А. Я. Семенюта, А. С. Сорокин. – Днепропетровск: ДМетИ, 1990. – 52 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Сясєв Андрій Валерійович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Розділ "Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи диференціальних рівнянь"

Конспект лекцій

Тем. план 2005, поз. 147

Підписано до друку 27.05.05. Формат $60\times84_{1/16}$. Папір друк. Друк плоский. Облік.- вид. арк. 2,58. Ум. друк. арк. 2,56. Тираж 100 пр. Замовлення № 110

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ – 5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ