МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних завдань з дисципліни “Вища математика” (розділ “Подвійний та криволінійний інтеграли”) для студентів усіх спеціальностей

Затверджено
на засіданні Вченої ради
академії
Протокол № 1 від 29.01.02.

Дніпропетровськ НМетАУ 2002

УДК 517 (07)

Методичні вказівки до виконання практичних завдань з дисципліни “Вища математика” (розділ “Подвійний та криволінійний інтеграли”) для студентів усіх спеціальностей / Укл.: Є. А. Макаренков, А. В. Сясєв. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2002. – 52 с.

Наведені докладні розв’язання типових задач з додатковими поясненнями теоретичних положень.
Призначені для студентів усіх спеціальностей.

Укладачі: Є. А. Макаренков, канд. техн. наук, доц.
А. В. Сясєв, ст. викл. (ДНУ)

Відповідальний за випуск А. В. Павленко, д-р. фіз.-мат. наук, проф.

Рецензент Т. І. Рибнікова, канд. фіз.-мат. наук, доц. (ДНУ)

Редактор А. Ю. Сосонна

Підписано до друку 27.03.02. Формат 60x84 1/16. Папір друк.
Друк плоский. Облік.-вид.арк. 3,05. Умов.друк.арк. 3,02.
Тираж 100 пр. Замовлення № 24

Національна металургійна академія України
49600, Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна,4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ

ВСТУП

Методичні вказівки призначені для студентів усіх спеціальностей і, особливо, для тих, хто самостійно вивчає даний розділ математичного аналізу та бажає придбати необхідні навички в розв’язуванні задач.

Передбачається, що студенти знайомі з основними теоретичними питаннями по подвійному та криволінійному інтегралах.

У заняттях приводяться докладні розв’язання типових задач з додатковими поясненнями теоретичних положень.

Наприкінці кожного заняття міститься визначена кількість задач для самостійного розв’язування з відповідями.

ЗАНЯТТЯ № 1. Подвійний інтеграл, його обчислення двократним інтегруванням

<u>З а д а ч а 1.1.</u> Обчислити двократні інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^1 dx \int_x^{2x} (x - y + 1) dy; \qquad \text{б) } \int_{-2}^{4} dy \int_0^y \frac{y^3}{x^2 + y^2} dx.$$

<u>Р о з в’ я з а н н я:</u> а) спочатку обчислюємо внутрішній інтеграл, де y є змінною, а x постійною:

$$\int_x^{2x} (x - y + 1) dy = \left(xy - \frac{y^2}{2} + y \right) \Bigg|_{y=x}^{y=2x} = 2x^2 - x^2 - \frac{4x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + 2x - x =$$

$$= x^2 - \frac{3}{2} x^2 + x = x - \frac{x^2}{2}.$$

Тут, після інтегрування, при підстановці меж інтегрування в первісну використовувалася формула Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x) dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Далі обчислюємо зовнішній інтеграл – одержаний вище результат інтегруємо по x:

$$\int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{3}.$$

Отже $\int_0^1 dx \int_x^{2x} (x - y + 1) dy = \frac{1}{3}$.

Відповідь: $\boxed{\frac{1}{3}}$.

б) тут інтегруємо спочатку по x, вважаючи y постійною.

$$\int_0^y \frac{y^3}{x^2 + y^2} dx = y^3 \int_0^y \frac{dx}{x^2 + y^2} = y^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \Bigg|_{x=0}^{x=y} = \frac{\pi y^2}{4}.$$

Далі обчислюємо зовнішній інтеграл – одержаний вище результат інтегруємо по y.

$$\int_{-2}^4 \frac{\pi y^2}{4} dy = \frac{\pi}{4} \int_{-2}^4 y^2 dy = \frac{\pi}{12} y^3 \Bigg|_{-2}^4 = \frac{\pi}{12}(64 + 8) = 6\pi .$$

Обчислення даного двократного інтегралу можна записувати в більш компактній формі.

$$\int_{-2}^4 dy \int_0^y \frac{y^3}{x^2 + y^2} dx = \int_{-2}^4 \left(y^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \Bigg|_{x=0}^{x=y} \right) dy = \frac{\pi}{4} \int_{-2}^4 y^2 dy = \frac{\pi}{12} y^3 \Bigg|_{-2}^4 = 6\pi .$$

Наведений компактний розв’язок доцільніше використовувати при достатніх навичках в обчислюванні двократних інтегралів.

Відповідь: $\boxed{6\pi}$.

<u>З а д а ч а 1.2.</u> Обчислити двократні інтеграли і побудувати область інтегрування (область D).

$$\text{а) } \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x + y) dy ; \qquad \text{б) } \int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy .$$

<u>Р о з в’ я з а н н я:</u> а) виконаємо внутрішнє інтегрування по y, вважаючи x постійною

$$\int_{x^2}^{x}(x+y)dy=\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=x}=x^2-x^3+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2}=\frac{3}{2}x^2-x^3-\frac{x^4}{2}.$$

Тепер здійснимо зовнішнє інтегрування по x:

$$\int_0^1\left(\frac{3}{2}x^2-x^3-\frac{x^4}{2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-0-\frac{1}{4}+0-\frac{1}{10}+0=\boxed{\frac{3}{20}}.$$

Побудуємо область інтегрування D (рис. 1.1).

Запишемо рівняння ліній, що обмежують область інтегрування:

$$x=0,\quad x=1,\quad y=x^2,\quad y=x.$$

Знайдемо точки перетину цих ліній.

$$\begin{cases} y=x^2, \\ x=0. \end{cases}\Rightarrow O(0;0);\quad \begin{cases} y=x^2, \\ x=1. \end{cases}\Rightarrow A(1;1);\quad \begin{cases} y=x, \\ x=0. \end{cases}\Rightarrow O(0;0);\quad \begin{cases} y=x, \\ x=1. \end{cases}\Rightarrow A(1;1).$$

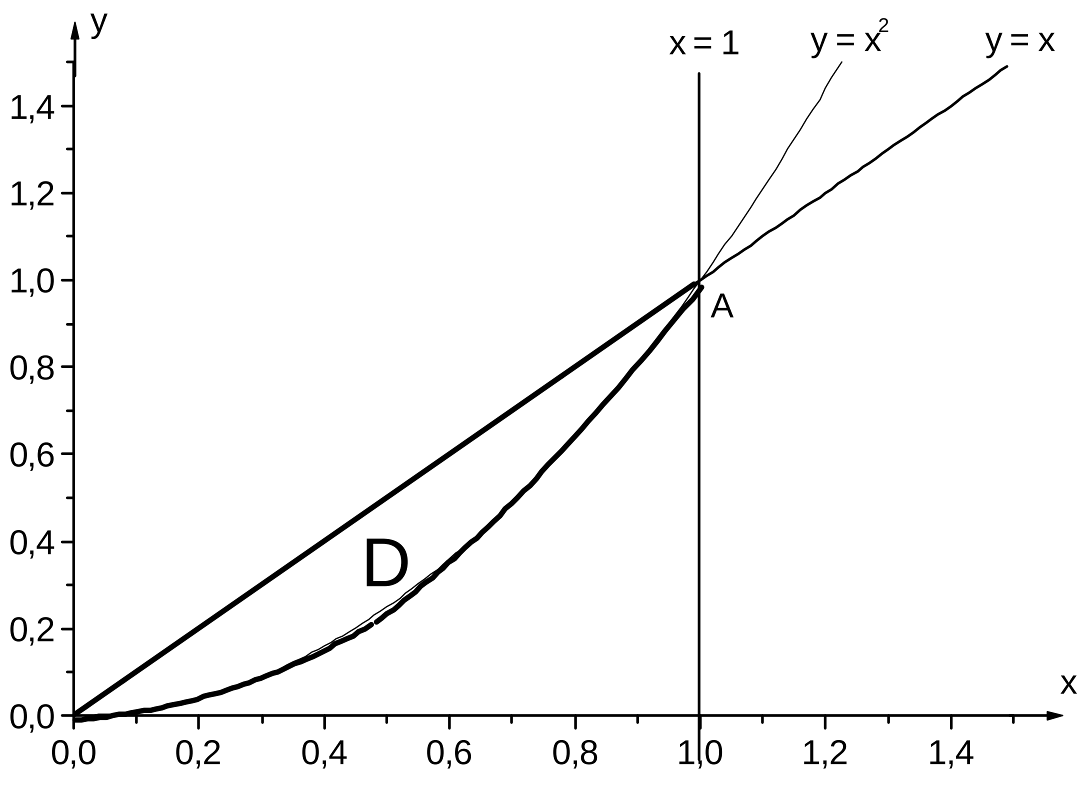


Рис. 1.1

Зобразимо одержану область D графічно. Будуємо прямі $x=0$ і $x=1$ паралельні осі Oy. Далі будуємо пряму $y=x$, що проходить через точки O і A, а також параболу $y=x^2$.

Необхідно пам'ятати, що область D замкнута, і всі дані лінії повинні входити в межу області інтегрування.

б) виконаємо внутрішнє інтегрування по y, вважаючи x постійною.

$$\int_{1/x}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy = x^2\int_{1/x}^{x} y^{-2}dy = -\frac{x^2}{y}\Bigg|_{y=1/x}^{y=x} = -\left(\frac{x^2}{x}-x^3\right) = x^3 - x \ .$$

Проінтегруємо одержаний результат по x (зовнішнє інтегрування):

$$\int_{1}^{2}\left(x^3 - x\right)dx = \left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2} = 4-\frac{1}{2}-2+\frac{1}{2} = \boxed{\frac{9}{4}}.$$

Побудуємо область D для даного двократного інтеграла.

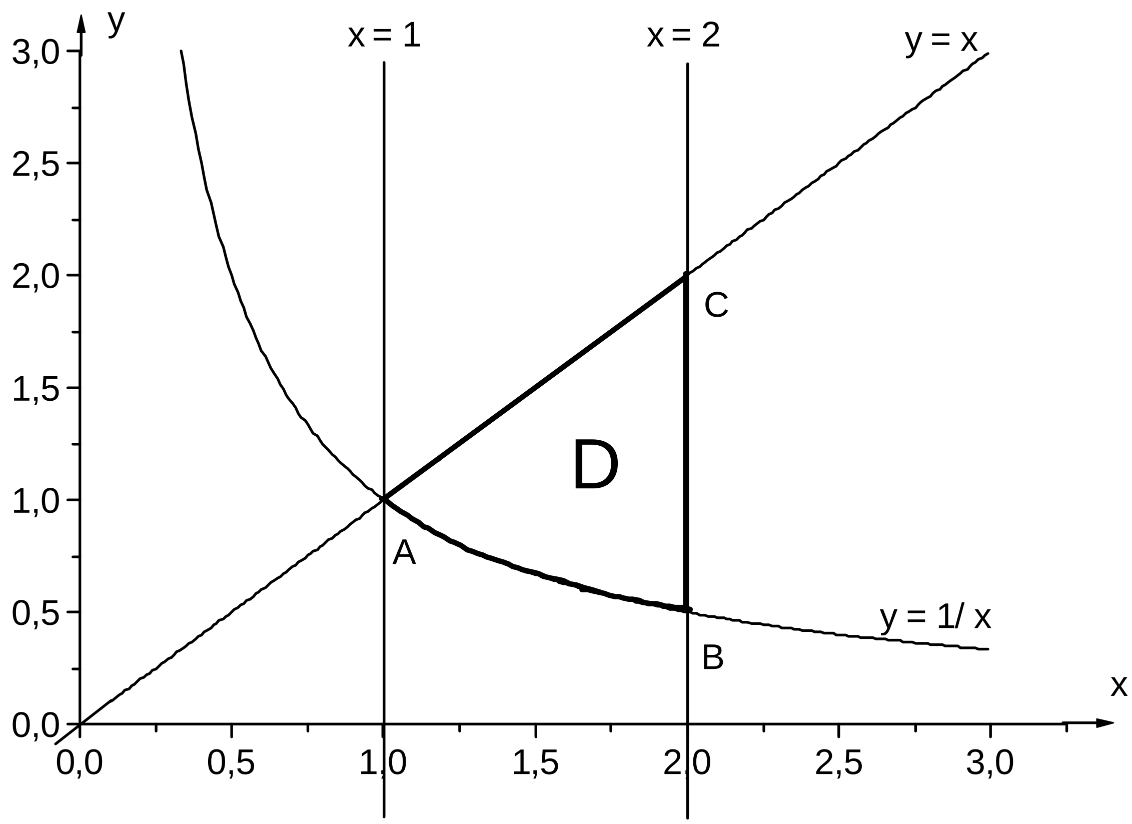


Рис. 1.2

Запишемо рівняння ліній, що обмежують область:

$$x=1,\quad x=2,\quad y=\frac{1}{2},\quad y=x.$$

Знайдемо точки перетину цих ліній.

$$\begin{cases} y=\frac{1}{x}, \\ x=1. \end{cases} \Rightarrow A(1;1);\quad \begin{cases} y=\frac{1}{x}, \\ x=2. \end{cases} \Rightarrow B\left(2;\frac{1}{2}\right);\quad \begin{cases} y=x, \\ x=1. \end{cases} \Rightarrow A(1;1);\quad \begin{cases} y=x, \\ x=2. \end{cases} \Rightarrow C(2;2).$$

Будуємо отриману область D (рис. 1.2), починаючи з точок перетину.

Далі проводимо прямі $x=1$ і $x=2$ паралельні осі Oy і пряму $y=x$, що проходить через точки A і C. І, нарешті, гіперболу $y=\frac{1}{x}$, що проходить через точки A і B. Тепер вибираємо ту ділянку площини XOY, де всі дані лінії входять у межу області D.

З а д а ч а 1.3. Обчислити подвійний інтеграл за допомогою переходу до двократного (повторного) по заданій області D:

а) $\iint\limits_D xydxdy$, якщо область D – прямокутник, обмежений прямими $x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b$ (a,b – постійні);

б) $\iint\limits_D \left(x+y^3\right)dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y^2=4x,\ y=0,$ $x+y=3$;

в) $\iint\limits_D \sin(x+y)dxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y=0,\ y=x,$ $x+y=\frac{\pi}{2}$.

Для розв'язування даної задачі необхідно знати наступне правило.

Якщо область D правильна, тобто така, що її контур L з кожною прямою, паралельною осям координат, перетинається не більш ніж у двох точках (рис. 1.3, 1.4), то обчислення подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ здійснюється по формулах (1.1), (1.2).

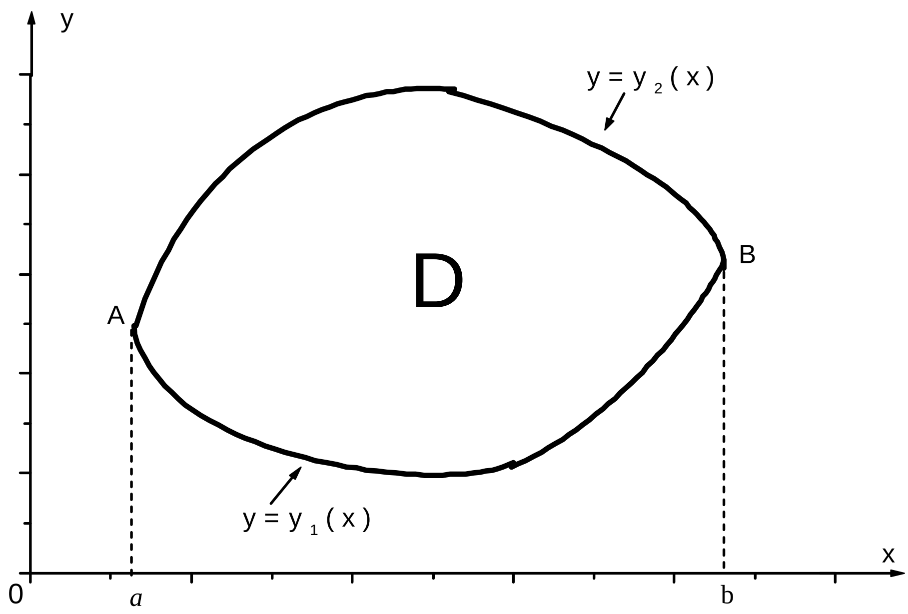


Рис. 1.3

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y)dy\,. \tag{1.1}$$

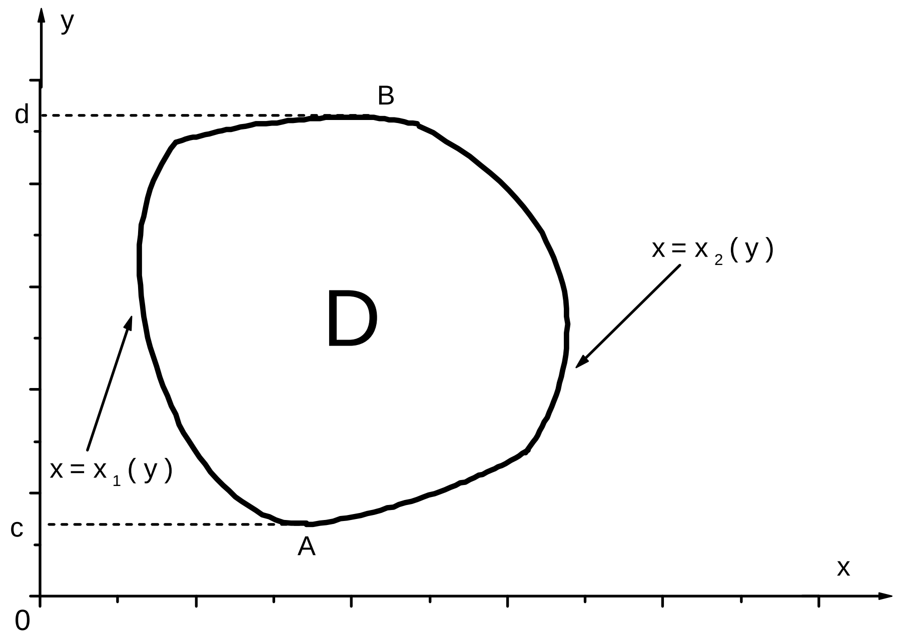


Рис. 1.4

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x,y)dx\,. \tag{1.2}$$

Р о з в' я з а н н я: а) побудувавши дані прямі (рис. 1.5), одержимо прямокутник $OABC$ зі сторонами, паралельними осям координат. При такій області інтегрування байдуже чи обчислювати подвійний інтеграл по формулі (1.1) чи по формулі (1.2).

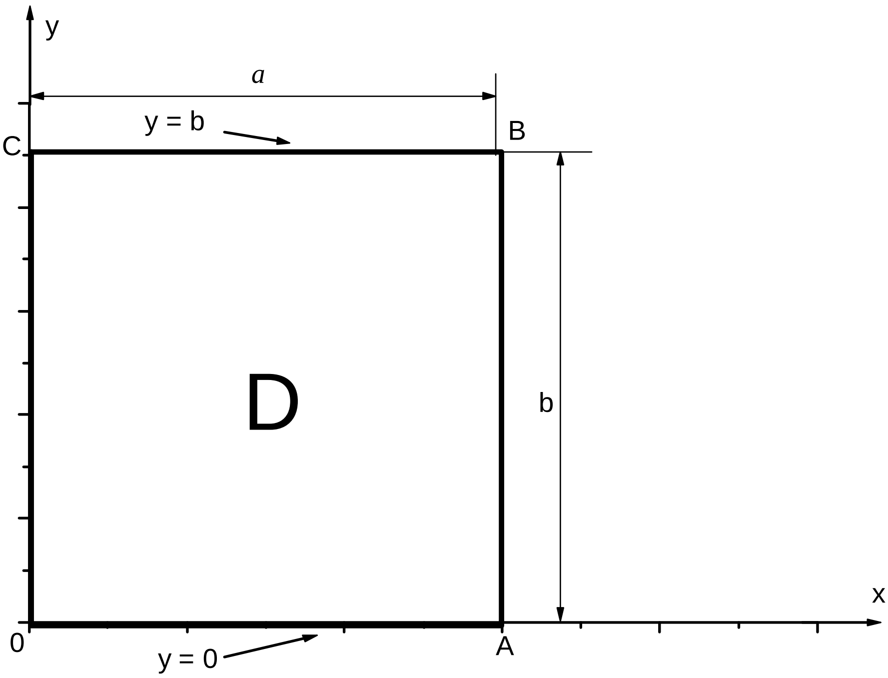


Рис. 1.5

Інтегруємо, використовуючи формулу (1.1), спочатку по y,потім по x.

$$\iint_D xydxdy = \int_0^a xdx \int_0^b ydy = \int_0^a \left(\frac{y^2}{2} \Bigg|_0^b \right) xdx = \frac{b^2}{2} \int_0^a xdx = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Bigg|_0^a = \boxed{\frac{a^2 b^2}{4}}.$$

б) знайдемо точки перетину ліній, що обмежують задану область інтегрування.

$$\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = 0. \end{cases} \Rightarrow O(0;0); \quad \begin{cases} y^2 = 4x, \\ x + y = 3. \end{cases} \Rightarrow A(9;-6),\ B(1;2); \quad \begin{cases} y + x = 3, \\ y = 0. \end{cases} \Rightarrow C(3;0).$$

Використовуючи знайдені точки перетину і задані рівняння ліній, побудуємо область D (рис. 1.6).

Представимо подвійний інтеграл у вигляді повторного по формулі (1.2). Зовнішні межі інтегрування постійні. У нашому випадку $y = 0$ і $y = 2$. Для визначення $x_1(y)$ і $x_2(y)$ надійдемо в такий спосіб. Візьмемо довільну точку M в області D і через цю точку проведемо пряму, паралельну вісі Ox. Точку M_1 назвемо точкою входу, а M_2 – точкою виходу. Точка M_1 лежить на кривій OB, рівняння якої $x = \frac{y^2}{4}$, тому $x_1 = \frac{y^2}{4}$.

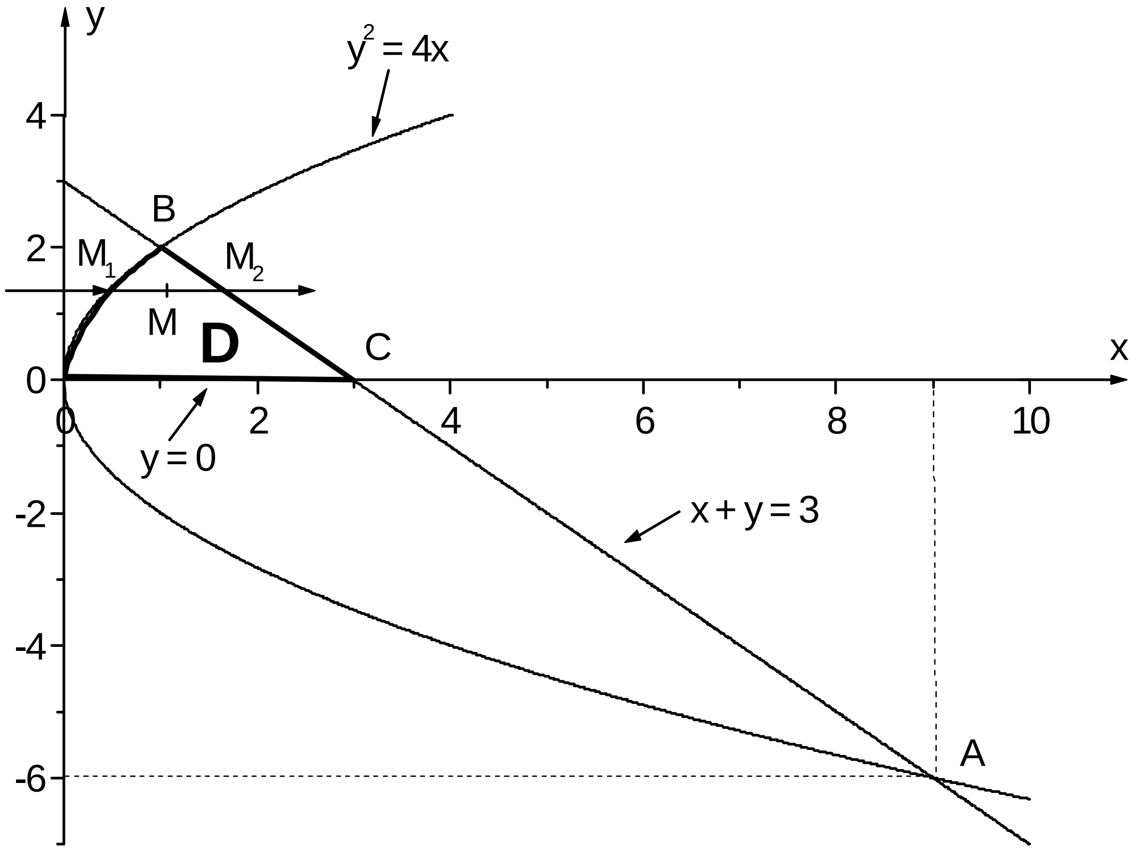


Рис. 1.6

Точка M_2 лежить на прямій BC, рівняння якої $x = 3 - y$, тому $x_2 = 3 - y$. Отже,

$$\iint\limits_D \left(x + y^3\right)dxdy = \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} \left(x + y^3\right)dx .$$

Спочатку виконаємо внутрішнє інтегрування по x, вважаючи $y - const$.

$$\int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} \left(x + y^3\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + y^3 x\right]\Bigg|_{x=\frac{y^2}{4}}^{x=3-y} = \frac{(3-y)^2}{2} - \frac{y^4}{32} + y^3(3-y) - \frac{y^5}{4}.$$

Тепер знаходимо повторний інтеграл від одержаної функції.

$$\int_0^2\left[\frac{(3-y)^2}{2}-\frac{y^4}{32}+3y^3-y^4-\frac{y^5}{4}\right]dy=\frac{1}{2}\int_0^2(3-y)^2dy-\frac{1}{32}\int_0^2 y^4dy+3\int_0^2 y^3dy-\int_0^2 y^4dy-\frac{1}{4}\int_0^2 y^5dy=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{(3-y)^3}{3}\bigg|_0^2-\frac{1}{32}\frac{y^5}{5}\bigg|_0^2+\frac{3}{4}y^4\bigg|_0^2-\frac{y^5}{5}\bigg|_0^2-\frac{y^6}{24}\bigg|_0^2=-\frac{1}{6}+\frac{9}{2}-\frac{1}{5}+12-\frac{32}{5}-\frac{8}{3}=\boxed{\frac{106}{15}}.$$

Зобразити даний подвійний інтеграл у вигляді одного повторного інтеграла по формулі (1.1) не можливо, тому що лінія OBC (рис. 1.6), на якій розташовуються точки виходу, на окремих відрізках (OB і BC) задаються різними рівняннями.

в) знайдемо точки перетину ліній, що обмежують задану область інтегрування.

$$\begin{cases} y=x, \\ y=0. \end{cases}\Rightarrow O(0;0); \quad \begin{cases} y=x, \\ x+y=\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right); \quad \begin{cases} y+x=\dfrac{\pi}{2}, \\ y=0. \end{cases}\Rightarrow B\left(\frac{\pi}{2};0\right).$$

Використовуючи знайдені точки перетину і задані рівняння ліній, побудуємо область D (рис. 1.7).

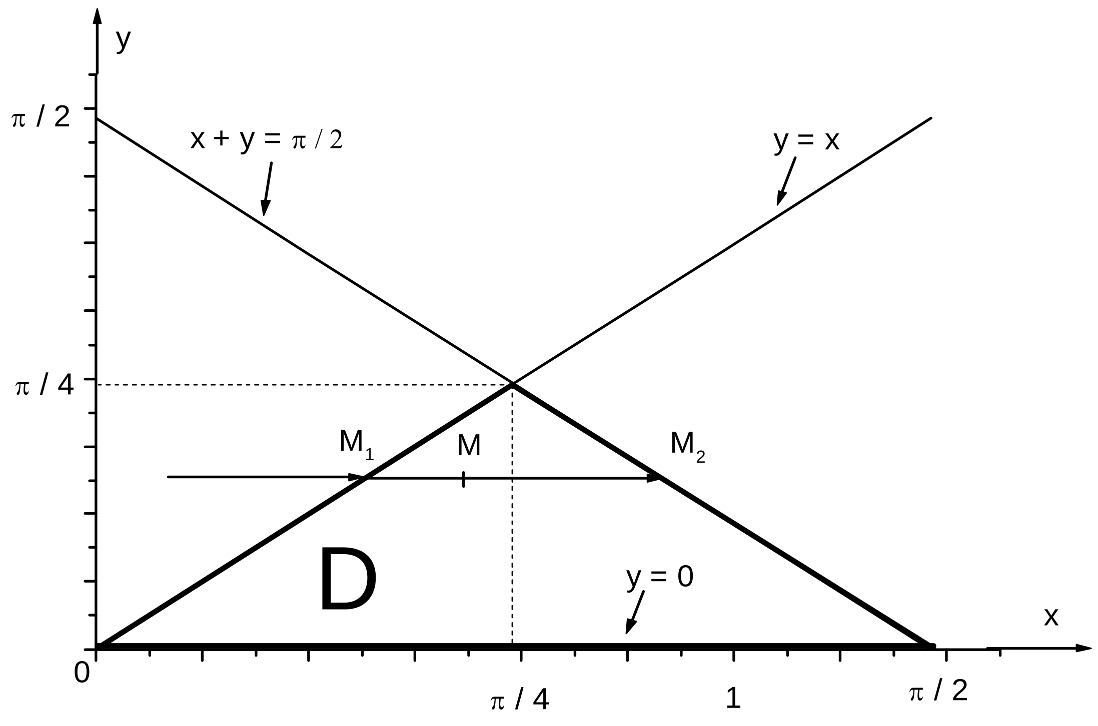


Рис. 1.7

Зобразимо подвійний інтеграл у вигляді повторного по формулі (1.2). Зовнішні межі інтегрування постійні.

У нашому випадку $y = 0$ і $y = \frac{\pi}{4}$ (рис. 1.7).

Для визначення $x_1(y)$ і $x_2(y)$ надходимо в такий же спосіб як і в прикладі б):

$$x_1 = y, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} - y.$$

Отже,

$$\iint_D \sin(x+y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_{x=y}^{x=\frac{\pi}{2}-y} \sin(x+y)dx.$$

Спочатку виконаємо внутрішнє інтегрування по x, вважаючи $y = const$:

$$\int_{x=y}^{x=\frac{\pi}{2}-y} \sin(x+y)dx = -\cos(x+y)\Big|_{x=y}^{x=\frac{\pi}{2}-y} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 2y\right) = \cos 2y.$$

Тепер інтегруємо, одержану функцію по y:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2y dy = \frac{1}{2}\sin 2y\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Зобразити даний подвійний інтеграл у вигляді одного повторного інтеграла по формулі (1.1) не можливо, тому що лінія OAB (рис. 1.7), на якій розташовуються точки виходу, на окремих відрізках (OA і AB) задається різними рівняннями.

З а д а ч а 1.4. Змінити порядок інтегрування в заданих повторних інтегралах

$$\text{а) } \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{1} f(x,y)dy; \quad \text{б) } \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)dy;$$

$$\text{в) } \int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x,y)dx; \quad \text{г) } \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} f(x,y)dx.$$

Тут $f(x,y)$ – довільна функція.

Р о з в' я з а н н я: а) спочатку по межах інтегрування визначаємо область інтегрування D. Припускаючи x рівним межам інтегрування із змінною x, а y рівним межам інтегрування із змінною y, одержимо рівняння ліній, що обмежують цю область: $x=0$, $x=1$, $y=-\sqrt{2x-x^2}$, $y=1$.

Знайдемо точки перетину цих ліній, а потім побудуємо їх (рис. 1.8).

$y=-\sqrt{2x-x^2}$ – окружність $y^2+(x-1)^2=1$, центр $C(1;0)$, $R=1$.

$$\begin{cases} y^2+(x-1)^2=1, \\ x=0. \end{cases} \Rightarrow O(0;0); \quad \begin{cases} y^2+(x-1)^2=1, \\ x=1. \end{cases} \Rightarrow A(1;1), \quad B(1;-1).$$

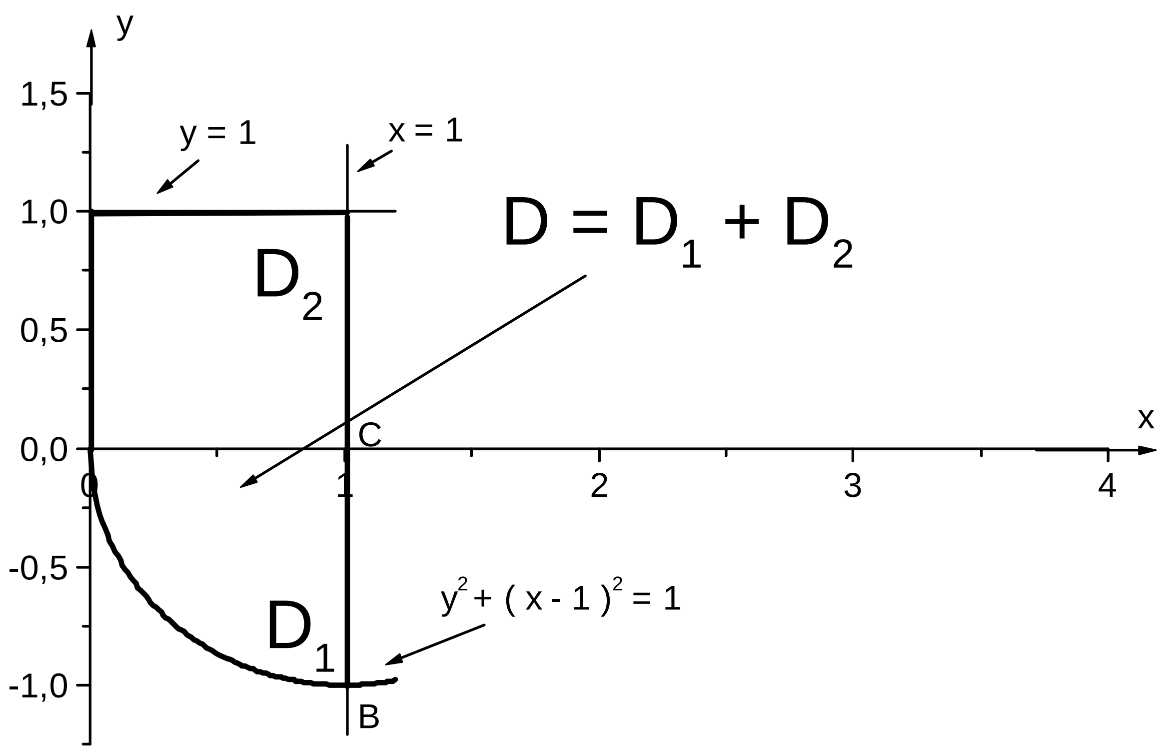


Рис. 1.8

Іншими словами в умові а) ми маємо повторний інтеграл записаний з використанням формули (1.1). Тепер будемо інтегрувати в іншому порядку, тобто змінимо порядок інтегрування – спочатку по x, потім по y.

Спроектуємо область D на вісь Oy, у результаті одержимо відрізок [-1;1]. Лівою межею області на відрізку [-1;0], є дуга окружності

$x = 1 + \sqrt{1 - y^2}$, правою – пряма $x = 1$. Лівою межею області на відрізку [0;1], є пряма $x = 0$, правою пряма $x = 1$.

Тому, область D варто розбити на дві підобласті D_1 і D_2, а інтеграл на суму інтегралів:

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{1} f(x,y)dy = \underbrace{\int_{-1}^{0} dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{1} f(x,y)dx}_{\text{по підобласті } D_1} + \underbrace{\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx}_{\text{по підобласті } D_2}.$$

Тут використана формула (1.2) для кожного доданка в правій частині.

б) по заданому повторному інтегралі знаходимо рівняння ліній, що обмежують область інтегрування D:

$$x = -2, \quad x = 2, \quad y = x^2, \quad y = 4.$$

Знаходимо точки перетину:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x = 2. \end{cases} \Rightarrow A(2;4); \qquad \begin{cases} y = x^2, \\ x = -2. \end{cases} \Rightarrow B(-2;4).$$

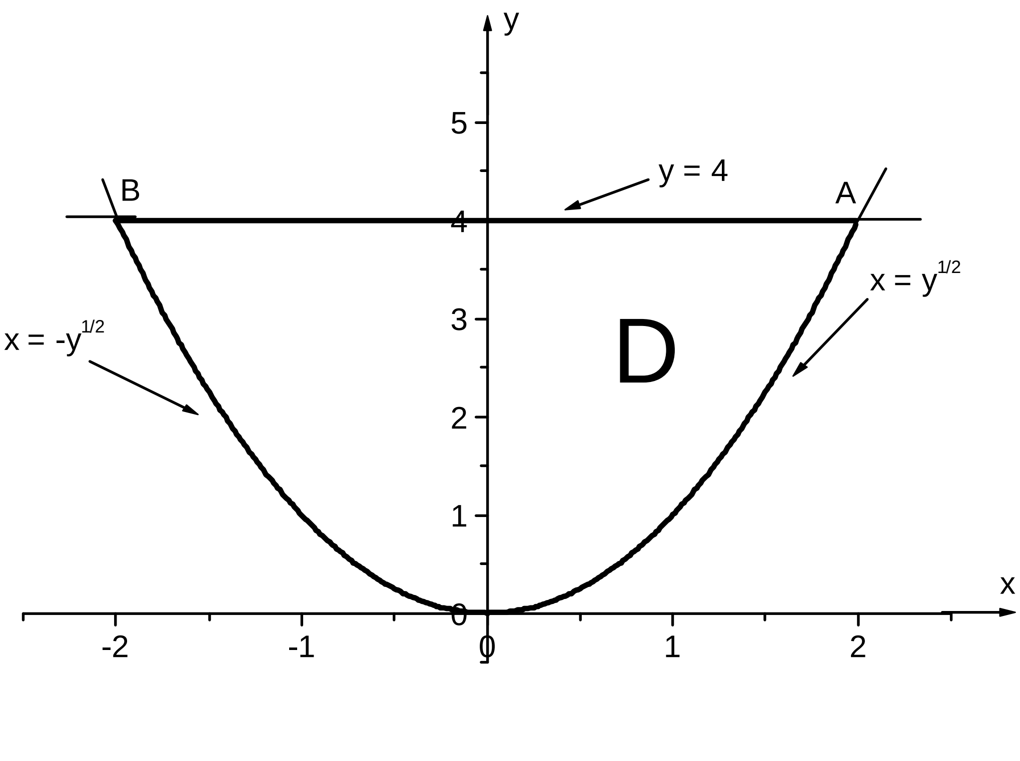


Рис. 1.9

Побудувавши ці лінії (рис. 1.9), одержимо параболічний сегмент OAB.

Інтегруємо в іншому порядку – спочатку по x, потім по y. Межі внутрішнього інтеграла знаходимо, розв'язуючи відносно x рівняння параболи $x=-\sqrt{y}$ і $x=\sqrt{y}$. Межі зовнішнього інтегралу $y=0$ і $y=4$ знаходимо як найменше і найбільше значення y по всій області OAB.

Отже,

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)dy = \int_{0}^{4} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx \ .$$

в) тут область інтегрування обмежена прямими:

$$y=1, \quad y=3, \quad x=0, \quad x=2y \ .$$

Точки перетину:

$$\begin{cases} x = 2y, \\ y = 1. \end{cases} \Rightarrow B(2;1); \qquad \begin{cases} x = 2y, \\ y = 3. \end{cases} \Rightarrow C(6;3).$$

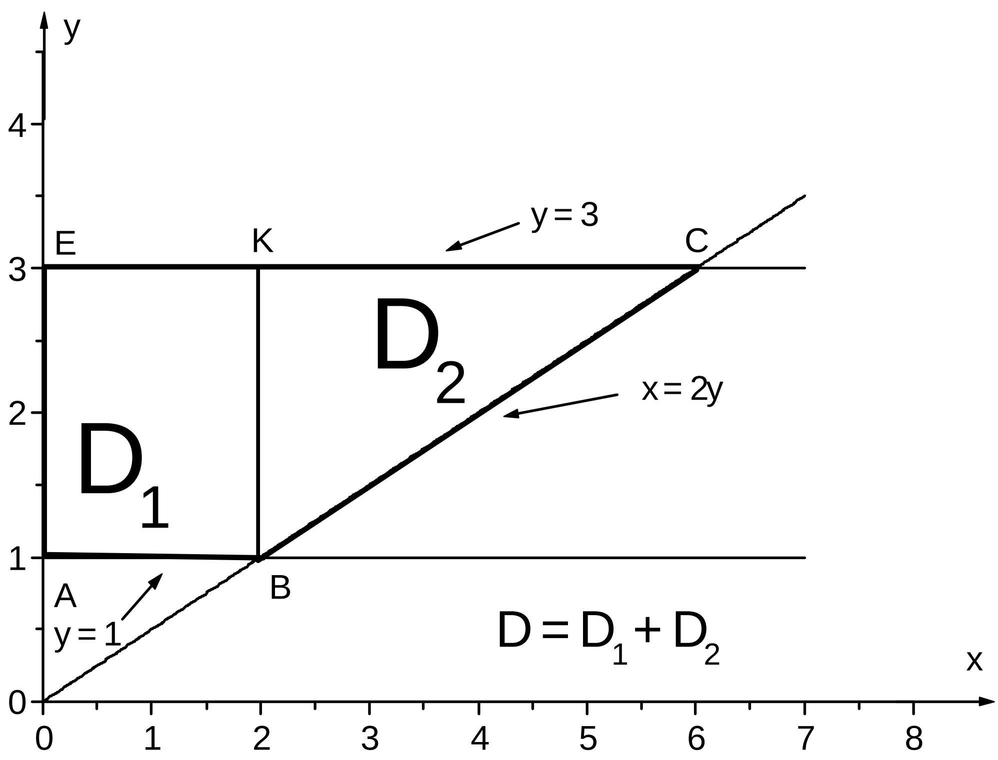


Рис. 1.10

На рис. 1.10 область D зображує трапецію $ABCE$.

При інтегруванні за допомогою формули (1.1), спочатку по y, необхідно розбити область $ABCE$ прямою BK, паралельною вісі Oy, на дві частини, тому що нижня лінія межі області D складається з двох частин AB і BC, що мають різні рівняння $y=1$ і $y=\frac{x}{2}$. Отже, область D розділилася на дві підобласті D_1 і D_2. Значить інтеграл при зміні порядку інтегрування буде дорівнювати сумі двох інтегралів по кожній з підобластей:

$$\int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x,y)dx = \underbrace{\int_0^2 dx \int_1^3 f(x,y)dy}_{\text{по підобласті } D_1} + \underbrace{\int_2^6 dx \int_{\frac{x}{2}}^3 f(x,y)dy}_{\text{по підобласті } D_2}.$$

г) тут область інтегрування D обмежена прямими $y=0$, $y=1$, $x=y$ і дугою параболи $x=y^2$.

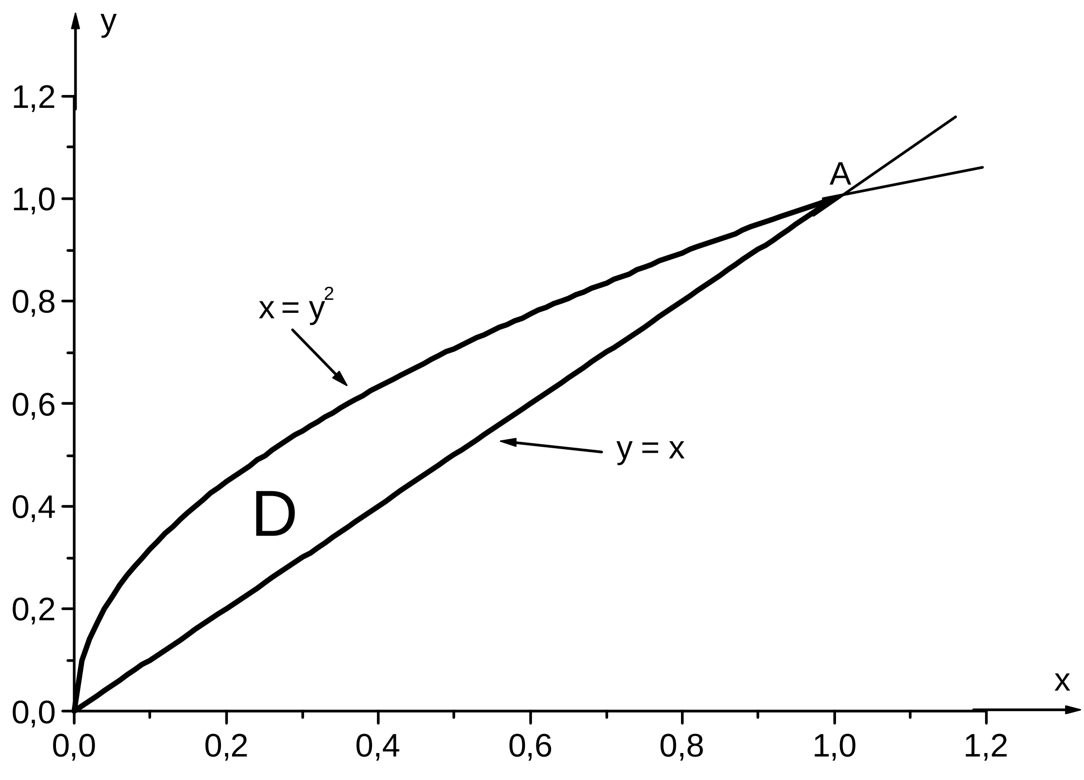


Рис. 1.11

Знайдемо точки перетину:

$$\begin{cases} x = y^2, \\ x = y. \end{cases} \Rightarrow O(0;0), \quad A(1;1).$$

Зобразимо одержану область (рис. 1.11).

Змінюємо порядок інтегрування використовуючи формулу (1.1). Перше інтегрування здійснюємо по y в межах від $y = x$ (нижня межа) до $y = \sqrt{x}$ (верхня межа); потім інтегруємо по x від $x = 0$ до $x = 1$.

$$\int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} f(x, y)dx = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x, y)dy .$$

<u>Задачі для самостійного розв'язування</u>

1. <u>Обчислити двократні інтеграли:</u>

а) $\int_0^2 dx \int_0^3 (x^2 + 2xy)dy$, відповідь $\boxed{26}$; *б)* $\int_2^0 dy \int_0^{y^2} (x + 2y)dx$; відповідь $\boxed{-11.2}$;

в) $\int_0^5 dx \int_0^{5-x} \sqrt{4 + x + y}\,dy$, відповідь $\boxed{\frac{506}{15}}$; *г)* $\int_1^2 dx \int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy$; відповідь $\boxed{\frac{9}{4}}$.

2. <u>Обчислити подвійний інтеграл</u> $\iint\limits_D (x + y)dxdy$ <u>, де область</u> D <u>– трикутник, обмежений прямими:</u>

$a)$ $x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 3.$ Відповідь: $\boxed{9}$

б) $x = a, \quad y = 0, \quad y = x.$ Відповідь: $\boxed{\frac{a^3}{2}}$.

3. <u>Обчислити подвійний інтеграл</u> $\iint\limits_D (2x + 3y + 1)dxdy$ <u>по області, яка обмежена трикутником з вершинами</u> $A(1;3)$, $B(-1;-1)$, $C(2;4)$. Відповідь: $\boxed{3.}$

4. <u>Змінити порядок інтегрування в наступних інтегралах.</u>

а) $\int_1^4 dy \int_y^4 f(x, y)dx$, *б)* $\int_{-1}^0 dx \int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy$,

в) $\int_0^1 dx \int_x^{2-x} f(x, y)dy$, *г)* $\int_1^2 dy \int_{1/y}^{y} f(x, y)dx$.

ЗАНЯТТЯ № 2. Подвійний інтеграл у полярних координатах

Для розв'язування задач по даній темі необхідно вказати декілька важливих формул і правил.

Іноді при обчисленні подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ зручно перейти до полярних координат, якщо при цьому область D є ***правильною*** в цих координатах, тобто такою, що кожен промінь, що виходить з полюса перетинає контур цієї області не більш ніж у двох точках (рис. 2.1). При цьому, досить покласти $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ і інтеграл приймає вигляд:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi . \qquad (2.1)$$

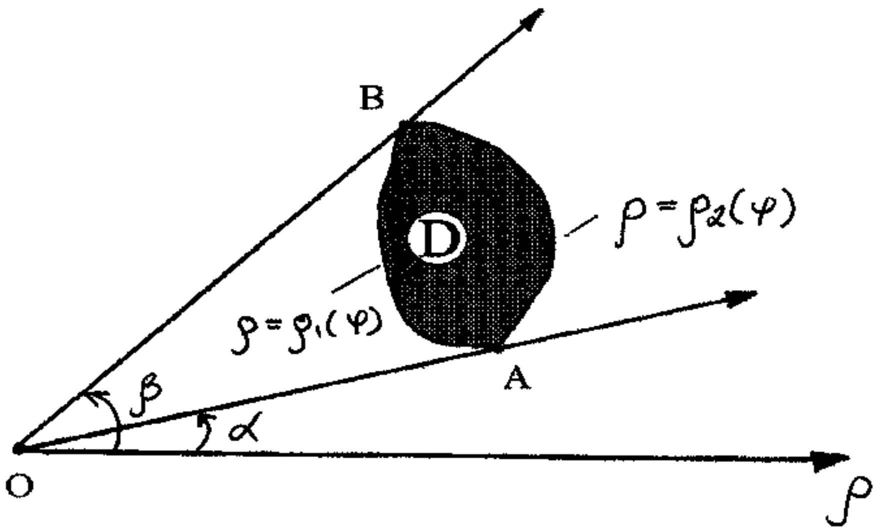


Рис. 2.1

Якщо область D обмежена променями, що утворюють з полярною віссю кути α і β $(\alpha \prec \beta)$, і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ і $\rho = \rho_2(\varphi)$ (рис. 1.2), то відповідні цієї області полярні координати змінюються в межах $D\{\alpha \le \varphi \le \beta\ ;\ \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi)\ \}$ і тоді

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho . \qquad (2.2)$$

Якщо область D охоплює початок координат, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho$, де $\rho = \rho(\varphi)$ – полярне рівняння кривої, що обмежує область D.

З а д а ч а 2.1. Обчислити повторні інтеграли, віднесені до полярних координат

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho^3 d\rho$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{3\cos\varphi} \rho^2 \sin^2\varphi d\rho$.

У кожнім з цих прикладів перше (внутрішнє) інтегрування виконується по ρ, вважаючи $\varphi = const$, а друге (зовнішнє) інтегрування виконується по φ.

Р о з в' я з а н н я: а) спочатку проводимо внутрішнє інтегрування по ρ:

$$\int\limits_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho^3 d\rho = \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{\cos^2 2\varphi}{4}.$$

Тепер зовнішнє інтегрування по φ:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 2\varphi}{4} d\varphi = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 4\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi + \frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8}\left.(\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi)\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi\right) = \boxed{\frac{\pi}{32}}.$$

б) виконуємо дії анологічні прикладу а):

$$\int\limits_0^{3\cos\varphi} \underbrace{\rho^2 \sin^2\varphi d\rho}_{(\sin^2\varphi = const)} = \sin^2\varphi \int\limits_0^{3\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \sin^2\varphi \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{3\cos\varphi} = 9\sin^2\varphi\cos^3\varphi,$$

$$9\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^3\varphi d\varphi = 9\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\cos\varphi d\varphi = 9\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi)\cos\varphi d\varphi =$$

$$=\left|\begin{matrix}\sin\varphi=t, \;\; при \;\; \varphi=-\dfrac{\pi}{2}\to t=-1 \\ \cos\varphi d\varphi=dt, \;\; при \;\; \varphi=\dfrac{\pi}{2}\to t=1\end{matrix}\right|=9\int_{-1}^{1}(t^2-t^4)dt=9\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=9\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)=\boxed{\frac{36}{15}}.$$

З а д а ч а 2.2. Зобразити подвійний інтеграл, заданий у полярній системі координат $\iint\limits_D F(\rho,\varphi)d\rho d\varphi$ у вигляді повторного, якщо область D обмежена лініями $\rho=R,\rho=2R\sin\varphi$.

Р о з в' я з а н н я. Лінія $\rho=R$ являє собою окружність з центром у полюсі O і радіусом R; $\rho=2R\sin\varphi$ – окружність того ж радіуса з центром у точці $C\left(\dfrac{\pi}{2};R\right)$.

Необхідно визначити, під яким кутом перетинаються дані окружності, для чого розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\rho=2R\sin\varphi, \\ \rho=R.\end{cases}\Rightarrow R=2R\sin\varphi\Rightarrow 1=2\sin\varphi;\;\; \sin\varphi=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha_1=\frac{\pi}{6},\;\; \alpha_2=\frac{5\pi}{6}.$$

Побудуємо область D (рис. 2.2).

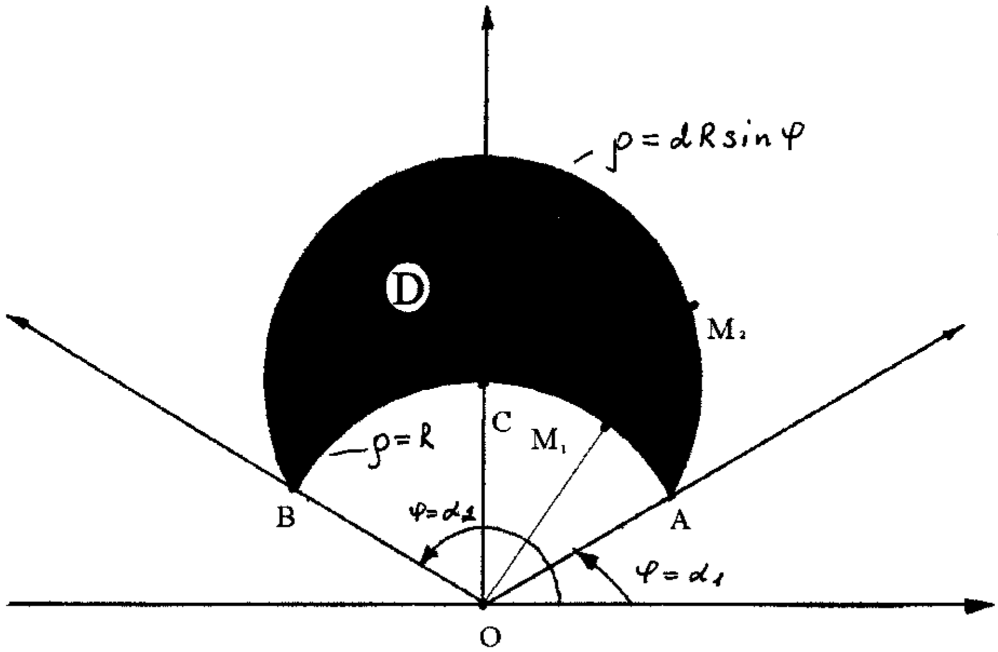


Рис. 2.2

В області D проводимо промінь OM_2 під довільним кутом $\varphi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right)$. Точкою входу в область D є точка M_1, її радіус-вектор $\rho_1 = R$. Точкою виходу цього променя з області D є точка M_2 з радіус-вектором $\rho_2 = 2R \sin \varphi$. Використовуючи формулу (2.2), одержуємо

$$\iint_D F(\rho, \varphi) d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} d\varphi \int_R^{2R \sin \varphi} F(\rho, \varphi) d\rho .$$

З а д а ч а 2.3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \rho \sin \varphi d\rho d\varphi$, якщо область D:

а) круговий сектор, обмежений лініями $\rho = a$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ і $\varphi = \pi$;

б) півколо $\rho \le 2a \cos \varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Р о з в' я з а н н я: а) побудуємо окружність $\rho = a$ і промені, що утворюють з полярною віссю кути $\varphi = \frac{\pi}{2}$ і $\varphi = \pi$. Одержимо круговий сектор OAB з центром у полюсі O (рис. 2.3).

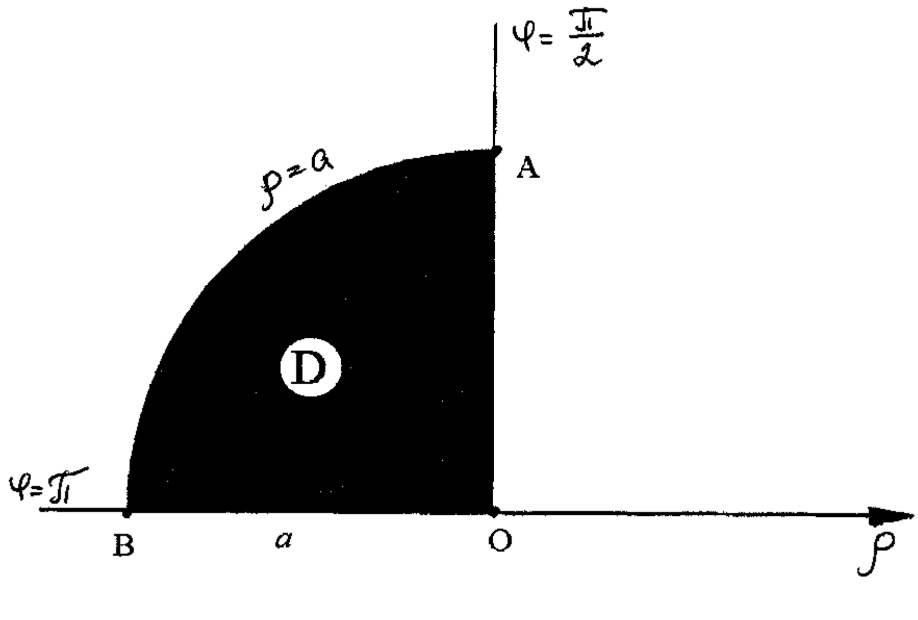


Рис. 2.3

$$\iint\limits_D \rho \sin \varphi d\rho d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int\limits_0^a \rho d\rho .$$

Обчислимо внутрішній інтеграл:

$$\int\limits_0^a \rho d\rho = \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^a = \frac{a^2}{2}.$$

З урахуванням одержаного співвідношення для зовнішнього інтеграла, будемо мати

$$\frac{a^2}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \varphi d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(-\cos\varphi\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{a^2}{2}\left(\cos\pi - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\frac{a^2}{2}}.$$

б) побудуємо область D. Лінія $\rho = 2a\cos\varphi$ є окружність з радіусом $R = a$ і центром у точці $C(a;0)$ (рис. 2.4).

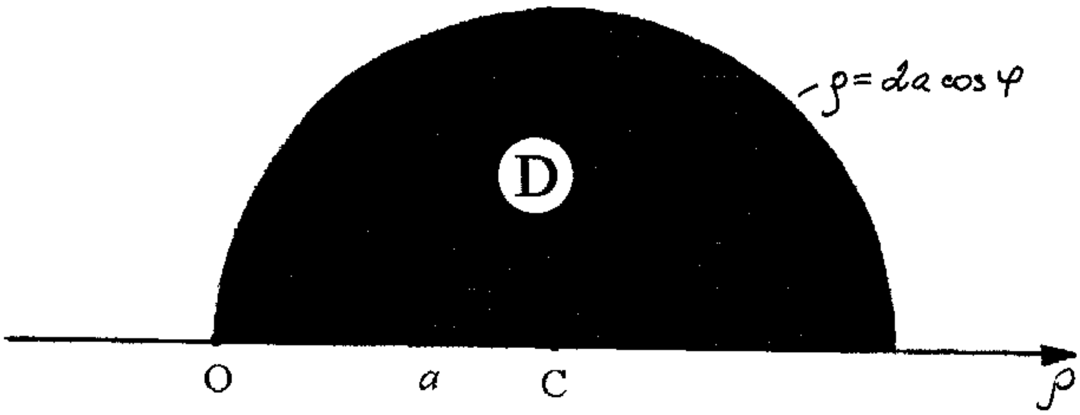


Рис. 2.4

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \sin \varphi\rho d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \rho d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left.\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\right|_0^{2a\sin\varphi} \sin\varphi\right] d\varphi =$$

$$= 2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi = \left|\begin{array}{c} t = \cos\varphi, \quad при \quad \varphi = 0 \to t = 1 \\ dt = -\sin\varphi d\varphi, \quad при \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \to t = 0 \end{array}\right| =$$

$$-2a^2\int\limits_1^0 t^2 dt = 2a^2\int\limits_0^1 t^2 dt = 2a^2 \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \boxed{\frac{2}{3}a^2}.$$

З а д а ч а 2.4. Перетворити до полярних координат і потім обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де область D – кругове кільце, укладене між окружностями $x^2+y^2=1$ і $x^2+y^2=4$.

Р о з в' я з а н н я. Користаючись відомими перетвореннями, запишемо рівняння окружностей у полярних координатах:

$$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=4 \Rightarrow \rho^2=4,\quad \rho=2\ ;$$

$$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=1 \Rightarrow \rho=1\ .$$

Виконаємо малюнок, заданої області D (рис. 2.5).

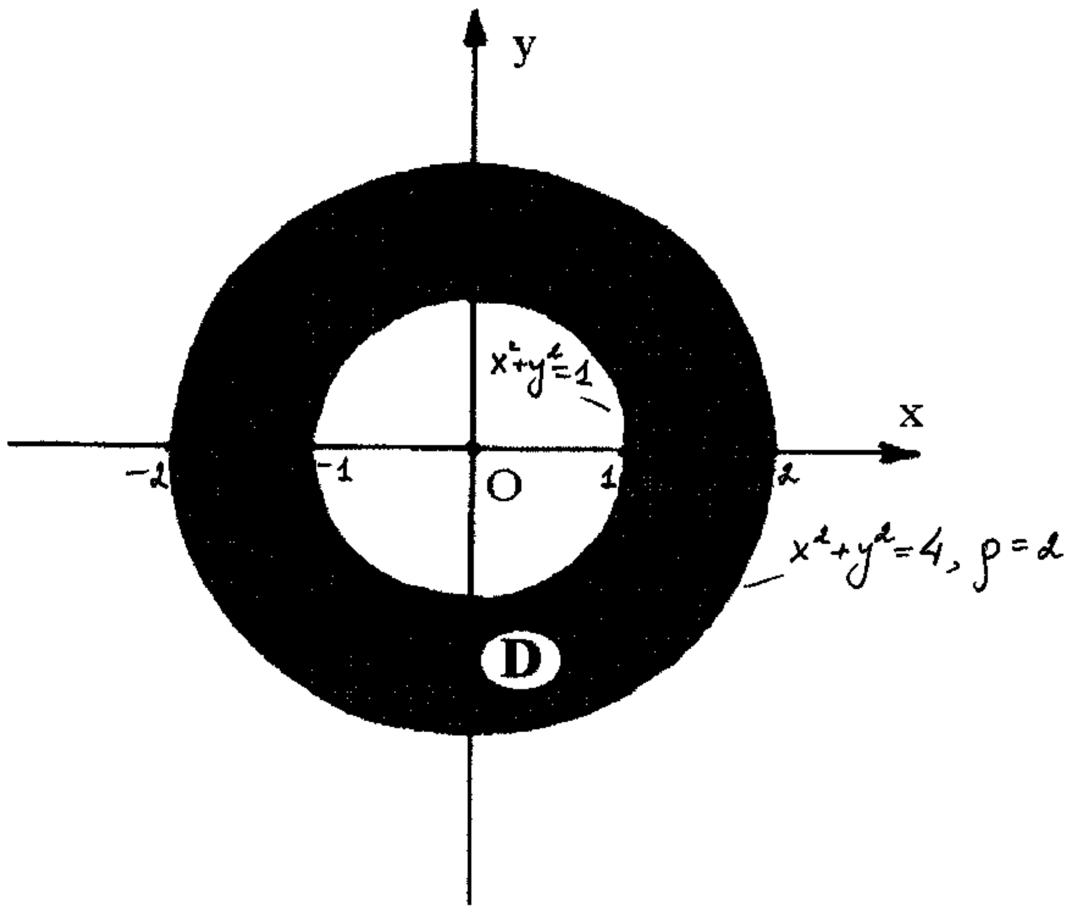


Рис. 2.5

$$\iint\limits_{1\le\rho\le2}\frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}}=\iint\limits_{1\le\rho\le2} d\varphi d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_1^2 d\rho=\boxed{2\pi}.$$

З а д а ч а 2.5. Перетворити до полярних координат подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$, де область D є квадратом з вершинами у точках $O(0;0)$ $A(1;0)$, $B(1;1)$, $C(0;1)$.

Р о з в' я з а н н я. Спочатку будуємо область D (рис. 2.6).

Перетворимо рівняння прямих, що обмежують область D, з декартових до полярних координат:

$$x=1 \Rightarrow \rho = \frac{1}{\cos\varphi}, \quad x=0 \Rightarrow \rho=0, \quad y=1 \Rightarrow \rho = \frac{1}{\sin\varphi}, \quad y=0 \Rightarrow \rho=0.$$

Полярний кут φ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$, тому що квадрат $OABC$ знаходиться в першій чверті.

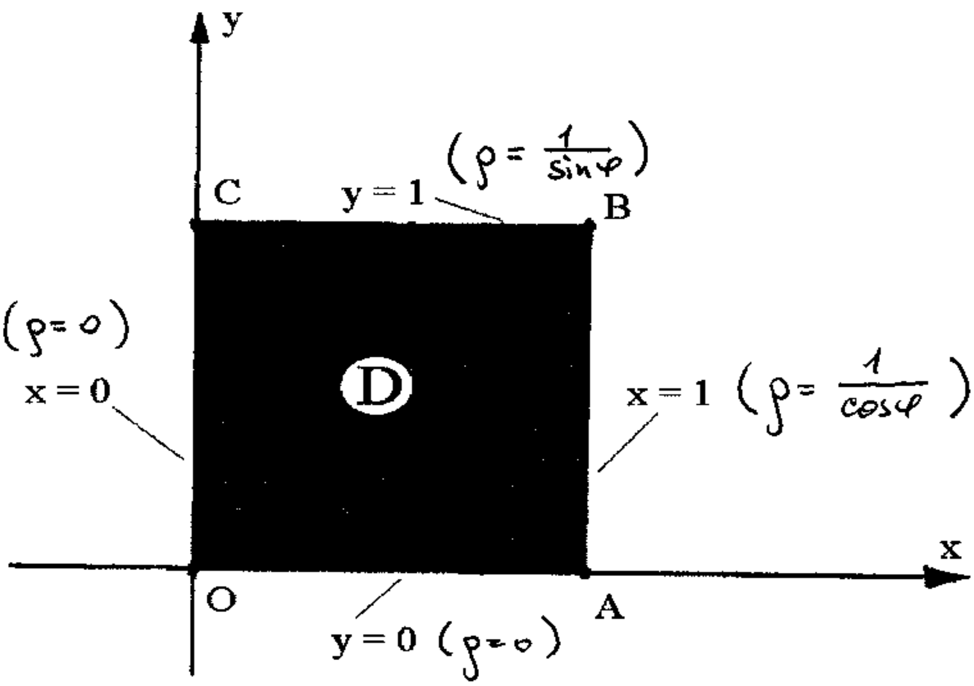


Рис. 2.6

При зміні кута φ від 0 до $\frac{\pi}{4}$, полярний радіус ρ змінюється від 0 до $\frac{1}{\cos\varphi}$. При зміні кута φ від $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$, полярний радіус ρ змінюється від

$\dfrac{1}{\sin\varphi}$ до 0. Отже в полярних координатах даний подвійний інтеграл буде виглядати таким чином:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sin\varphi}}^{0} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho .$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \rho^2 d\rho d\varphi$, якщо область D обмежена:

а) окружностями $\rho = a, \quad \rho = 2a$; відповідь $\boxed{\dfrac{14}{3}\pi a^3}$;

б) першим завитком спіралі $\rho = a\varphi$ і полярною віссю; відповідь $\boxed{\dfrac{4}{3}\pi^4 a^3}$;

в) кривою $\rho = a\sin 2\varphi$; відповідь $\boxed{0}$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi$, по області D, яка обмежена кардіоїдою $\rho = a(1+\cos\varphi)$ і полярною віссю якщо:

а) $0 \le \varphi \le 2\pi$; відповідь $\boxed{\dfrac{4}{3}a^3}$;

б) $\pi \le \varphi \le 2\pi$; відповідь $\boxed{-\dfrac{4}{3}a^3}$.

3. Перетворити до полярних координат і обчислити подвійні інтеграли:

а) $\iint_D xy^2 dxdy$, якщо область D обмежена окружностями $x^2 + (y-1)^2 = 1$ і $x^2 + y^2 = 4y$; відповідь $\boxed{0}$;

б) $\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy$, якщо область $D-$ коло $x^2 + y^2 \le a^2$; відповідь $\boxed{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)}$;

в) $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\, dxdy$, якщо область $D-$ коло $x^2 + y^2 = 1$; відповідь $\boxed{\dfrac{2}{3}\pi}$.

ЗАНЯТТЯ № 3. Обчислення площі за допомогою подвійного інтеграла

Площа S плоскої області D дорівнює подвійному інтегралу від ds, розповсюдженому на область D

$$S = \iint_D ds. \qquad (3.1)$$

У прямокутних координатах $ds = dxdy$ і формула (3.1) для обчислення площі плоскої фігури здобуває вигляд

$$S = \iint_D dxdy. \qquad (3.2)$$

У полярних координатах $ds = \rho d\rho d\varphi$ і тоді

$$\iint_D \rho d\rho d\varphi. \qquad (3.3)$$

З а д а ч а 3.1. Обчислити площу плоскої області D, обмеженої лініями:

а) $y = 2$, $y = x^2 - 1$;

б) $x^2 + y^2 = 4$, $x + y = 2$, $y = 1$, $(x \ge 0,\ y \ge 1)$;

в) $y = 2^x$, $y = 2^{-2x}$, $y = 4$;

г) $\rho = a\cos\varphi$, $\rho = b\cos\varphi$, $b > a > 0$, $(a, b = const)$;

д) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, $(a = const)$.

Р о з в' я з а н н я: а) визначимося з лініями, що обмежують область D: $y = 2$ – пряма, яка паралельна осі Ox, $y = x^2 - 1$ – парабола з вершиною в точці $A(0;-1)$, віссю симетрії якої є координатна вісь Oy, і гілки спрямовані вгору.

Будуємо область D по точках перетину даних ліній (рис. 3.1)

$$\begin{cases} y = x^2 - 1, \\ y = 2; \end{cases} \Rightarrow B(-\sqrt{3};2),\ \ C(\sqrt{3};2).$$

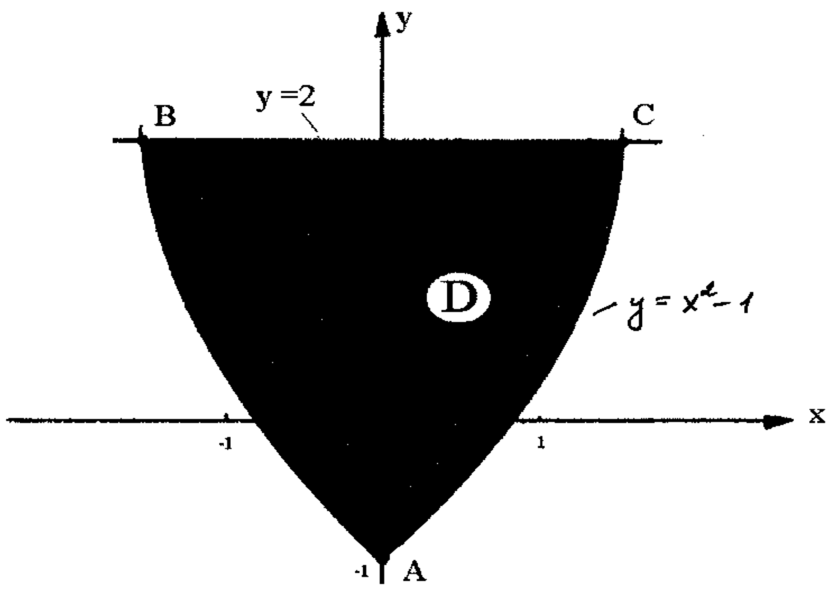


Рис. 3.1

Область D можна спроектувати і на вісь Ox, і на вісь Oy; спроектуємо її спочатку на вісь Oy. Область D симетрична щодо осі Oy, тому досить обчислити площу правої (лівої) половини області D і результат подвоїти.

Права половина області D проектується на вісь Oy у відрізок $[-1;2]$ і має лівою межею пряму $x=0$, а правою – $y=x^2-1$ або лінію $x=\sqrt{y+1}$. Скориставшися формулами (1.2) і (3.2), одержимо

$$\frac{S}{2}=\iint_D dxdy=\int_{-1}^{2}dy\int_{0}^{\sqrt{y+1}}dx=\int_{-1}^{2}\sqrt{y+1}\,dy=\left.\frac{2(y+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_{-1}^{2}=2\sqrt{3}\ \textit{кв. од.}$$

$$\boxed{S=4\sqrt{3}\ \textit{кв.од.}}$$

Тепер спроектуємо область D на вісь Ox.

Маємо межі інтегрування щодо вісі Ox: $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$, верхня межа – пряма $y=2$, нижня межа – парабола $y=x^2-1$. Використовуючи формули (1.1) і (3.2), одержимо

$$S=\iint_D dxdy=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}dx\int_{x^2-1}^{2}dy=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(3-x^2\right)dx=\left.\left(3x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=6\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\boxed{4\sqrt{3}\ \textit{кв.од.}}$$

Результати тотожні.

Звідси <u>***висновок:***</u> *Значення подвійного інтеграла не залежить від порядку (шляху) інтегрування.*

б) дана область D, що обмежена окружністю $x^2 + y^2 = 4$, з радіусом $R = 2$ і центром у точці $O(0;0)$ і прямими $x + y = 2$, $y = 1$.

Знайдемо їхні точки перетину.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = 2; \end{cases} \Rightarrow A(0;2),\ \ E(2;0); \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = 1; \end{cases} \Rightarrow B(\sqrt{3};1),\ \ D(-\sqrt{3};1);$$

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ y = 1; \end{cases} \Rightarrow C(1;1).$$

Побудуємо область D (рис. 3.2).

Область D проектується на вісь Oy у відрізок $[1;2]$ і має лівою межею пряму $x = 2 - y$, а правою – дугу окружності $x = \sqrt{4 - y^2}$. Для визначення площі області D скористаємося формулами (1.2), (3.2).

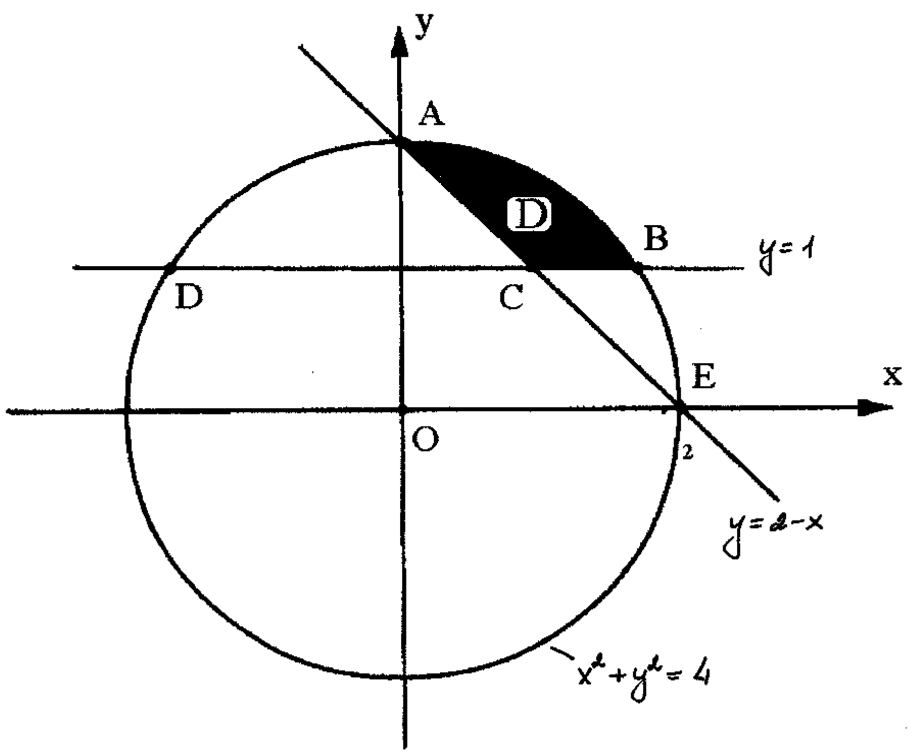


Рис. 3.2

$$S=\iint\limits_{D}dxdy=\int\limits_{1}^{2}dy\int\limits_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}}dx=\int\limits_{1}^{2}\left(\sqrt{4-y^2}-2+y\right)dy=$$

$$=\underbrace{\int\limits_{1}^{2}\sqrt{4-y^2}\,dy}_{I}-2\int\limits_{1}^{2}dy+\int\limits_{1}^{2}ydy=I-2y\Big|_{1}^{2}+\frac{y^2}{2}\Bigg|_{1}^{2}\equiv$$

$$I=\left|\begin{matrix} y=2\sin t, \quad \textit{при} \;\; y=1\rightarrow t=\dfrac{\pi}{6} \\ dy=2\cos tdt, \quad \textit{при} \;\; y=2\rightarrow \dfrac{\pi}{2}\end{matrix}\right|=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\left(2\cos t\right)dt=4\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=2\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)dt=2\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\equiv\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{4\pi-3\sqrt{3}-3}{6}\;\textit{кв. од.}$$

$$\boxed{S=\frac{4\pi-3\sqrt{3}-3}{6}\textit{кв. од.}}$$

в) побудуємо лінії, що обмежують область D і знайдемо їх точки перетину (рис. 3.3).

$$\begin{cases} y=2^{x}, \\ y=2^{-2x}; \end{cases}\Rightarrow A(0;1);\quad \begin{cases} y=2^{x}, \\ y=4; \end{cases}\Rightarrow B(2;4);\quad \begin{cases} y=2^{-2x}, \\ y=4; \end{cases}\Rightarrow C(-1;4).$$

Вийшов криволінійний трикутник ABC. Область D проектується на вісь Oy у відрізок $[1;4]$ і має лівою межею $y=2^{-2x}$ або лінію $x=-\dfrac{1}{2}\log_2 y$, правою межею – $y=2^{x}$ або лінію $x=\log_2 y$. Скориставшися властивостями логарифмів, одержимо:

$$x=-\frac{\ln y}{2\ln 2}\;\text{ и. }x=\frac{\ln y}{\ln 2}$$

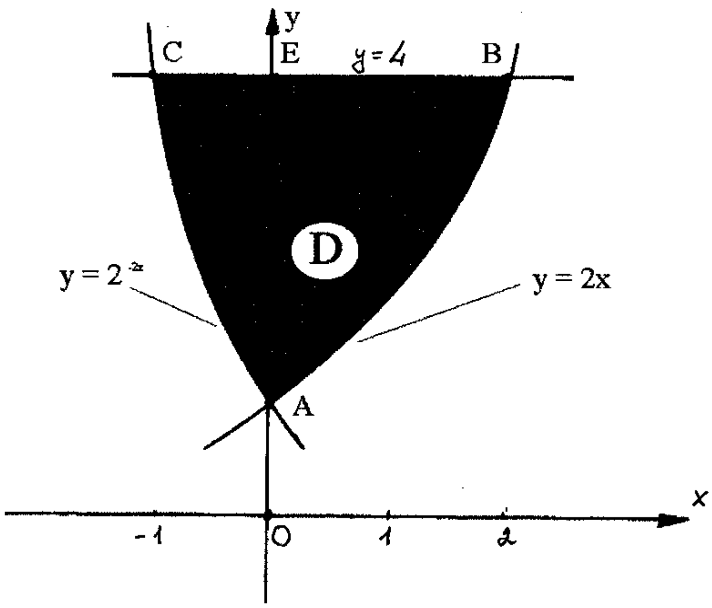


Рис. 3.3

Відповідно до формули (3.2) будемо мати

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_1^4 dy\int\limits_{-\frac{\ln y}{2\ln 2}}^{\frac{\ln y}{\ln 2}}dx=\int\limits_1^4\left(\frac{\ln y}{\ln 2}+\frac{\ln y}{2\ln 2}\right)dy=\frac{3}{2\ln 2}\int\limits_1^4\ln y dy=\left|\begin{matrix}\ln y=u, & dv=dy\\ \dfrac{dy}{y}=du, & v=y\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{3}{2\ln 2}\left(y\ln y\Big|_1^4-\int\limits_1^4 dy\right)=\frac{3}{2\ln 2}\left(4\ln 4-3\right)\approx 5{,}507\ \textit{кв. од.}$$

$$\boxed{S\approx 5{,}507\,\textit{кв. од.}}$$

Для перевірки одержаного результату скористаємося формулою (1.1). Очевидно, що необхідно розбити область ABC на дві підобласті AEC і ABE (рис. 3.3), унаслідок чого площа S дорівнює сумі двох подвійних інтегралів:

$$S=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_{AEC}dxdy+\iint\limits_{ABE}dxdy=\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_{2^{-2x}}^4 dy+\int\limits_0^2 dx\int\limits_{2^x}^4 dy=$$

$$=\int\limits_{-1}^0\left(4-2^{-2x}\right)dx+\int\limits_0^2\left(4-2^x\right)dx=4x\Big|_{-1}^0+\frac{1}{2}\frac{2^{-2x}}{\ln 2}\Bigg|_{-1}^0+4x\Big|_0^2-\frac{2^x}{\ln 2}\Bigg|_0^2=12-\frac{9}{\ln 4}\approx 5{,}507\,\textit{кв. од.}$$

Результати тотожні.

Примітка: *По можливості необхідно вибирати той порядок інтегрування, що дозволяє не розбивати область D на частини.*

г) визначимося з лініями, що обмежують область $D: \rho = a\cos\varphi$ – окружність з радіусом $R = \frac{a}{2}$ і центром у точці $C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$; $\rho = b\cos\varphi$ – окружність з радіусом $R = \frac{b}{2}$ і центром у точці $A\left(\frac{b}{2}, 0\right)$. Зобразимо область D враховуючи, що обидві окружності симетричні щодо полярної осі і, що верхня половина кожної з них виходить при зміні кута від $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (рис. 3.4).

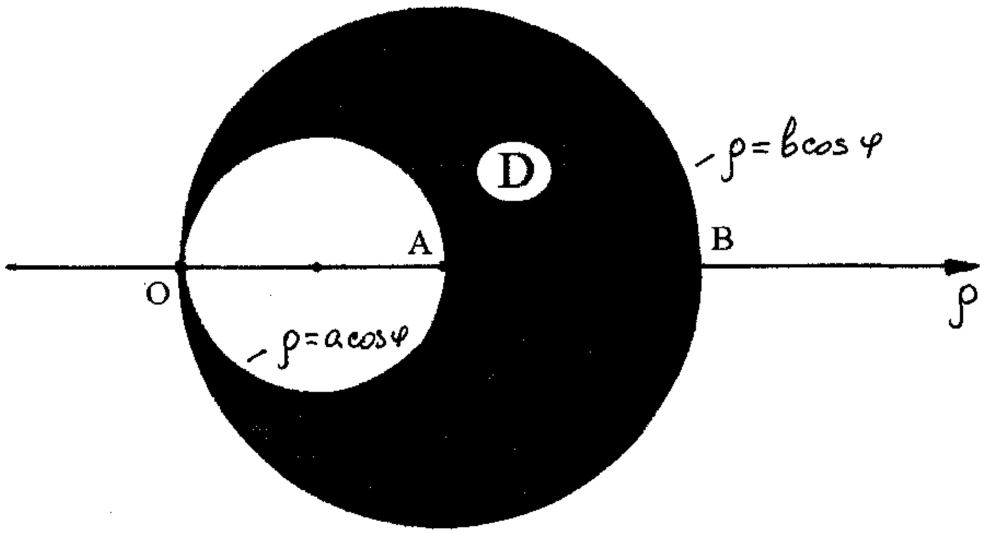


Рис. 3.4

Знаходимо площу S області D по формулах (2.2), (3.3)

$$S = \iint_D \rho d\rho d\varphi = 2\iint_{ABO} \rho d\rho d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{b\cos\varphi} \rho d\rho = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{\rho^2}{2} \right) \Bigg|_{a\cos\varphi}^{b\cos\varphi} \right] d\varphi =$$

$$= \left(b^2 - a^2\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{b^2 - a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{b^2 - a^2}{2} \left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(b^2 - a^2\right) \text{ кв. ед.} \qquad \boxed{S = \frac{\pi}{4}\left(b^2 - a^2\right) \text{ кв.од.}}$$

д) площу фігури, що обмежена даною замкнутою кривою (лемніскатою Бернуллі), простіше обчислити, перейшовши до полярних координат. Покладаючи в даному рівнянні кривої $x=\rho\cos\varphi$ і $y=\rho\sin\varphi$, одержимо:

$$\left(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\right)^2=2a^2\rho^2\cos\varphi\sin\varphi \Rightarrow \rho^2=a^2\sin 2\varphi .$$

Це і є полярне рівняння даної кривої. Побудуємо область D у полярних координатах.

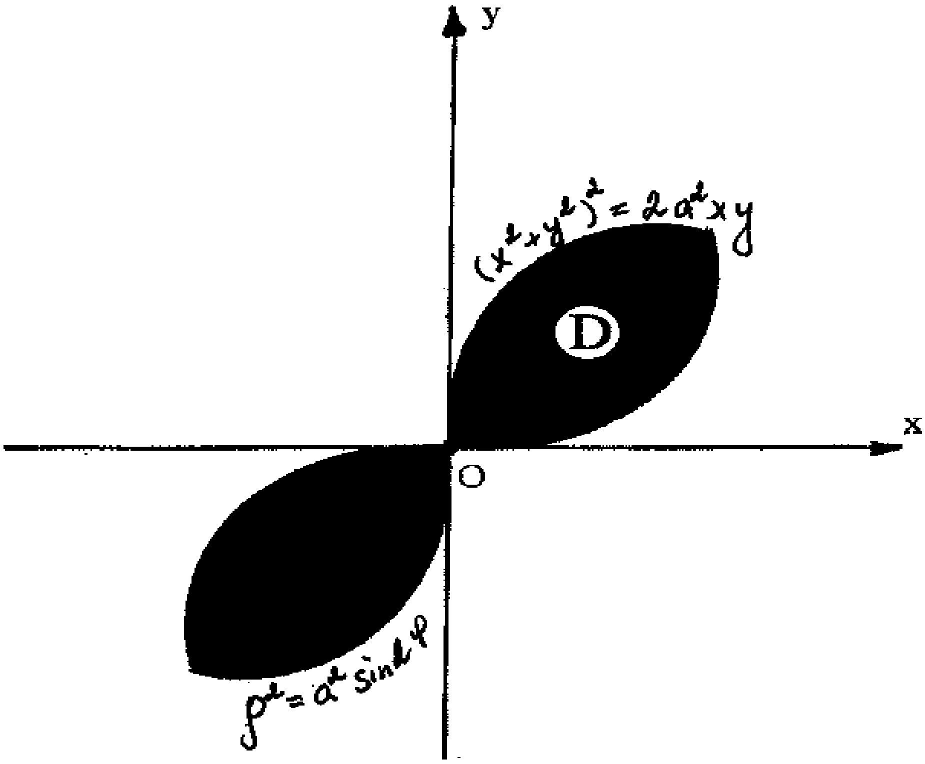


Рис. 3.5

Помітимо, що дана крива симетрична щодо полюса O і при зміні кута φ від 0 до $\dfrac{\pi}{2}$ будь-яка поточна точка $(\varphi;\rho)$ опише половину кривої, яка розташована вище полярної осі. Скориставшися формулами (2.2), (3.2), будемо мати:

$$S=\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho d\rho = a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi = -\frac{a^2}{2}\cos 2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{a^2 \ \textit{кв.од.}}$$

<u>Задачі для самостійного розв'язування</u>

1. <u>Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями:</u>

а) $3x^2 = 25y,\ 5y^2 = 9x$; відповідь $\boxed{5\ кв.\ од.}$;

б) $y = e^x\ ,\ y = e^{2x}\ ,\ x = 1$; відповідь $\boxed{\dfrac{(e-1)^2}{2}\ кв.од.}$;

в) $x + y = 1,\ x + 3y = 1,\ x = y,\ x = 2y$; відповідь $\boxed{\dfrac{7}{20}\ кв.од.}$;

г) $\rho = 4\sin\varphi,\ \rho = 2\sin\varphi$; відповідь $\boxed{3\pi\ \ кв.од.}$;

е) $\rho = a\sin 3\varphi$; відповідь $\boxed{\dfrac{\pi a^2}{4}\ кв.од.}$

2. <u>Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями, переходячи до полярної системи координат:</u>

а) $(x-a)^2 + y^2 = a^2\ ,\ x^2 + (y-a)^2 = a^2$; відповідь $\boxed{a^2\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)кв.од.}$;

б) $x^2 + y^2 - 2ax = 0,\ x^2 + y^2 - ax = 0$; відповідь $\boxed{\dfrac{3a^2\pi}{4}\ кв.од.}$;

в) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2y^3$; відповідь $\boxed{\dfrac{5\pi}{8}\ кв.од.}$

ЗАНЯТТЯ № 4. Обчислення об'єму тіл за допомогою подвійного інтеграла

Об'єм вертикального циліндричного тіла, що має своєю підставою область D *на площині* Oxy *й обмеженого зверху поверхнею* $z = f(x, y)$ *(рис. 4.1) виражається подвійним інтегралом*

$$V = \iint_D z dxdy = \iint_D f(x, y) dxdy. \tag{4.1}$$

Обчислення об'ємів тіл більш складної форми зводиться до обчислення алгебраїчної суми об'ємів декількох вертикальних циліндричних тіл (з утворюючими, паралельними осі Oz).

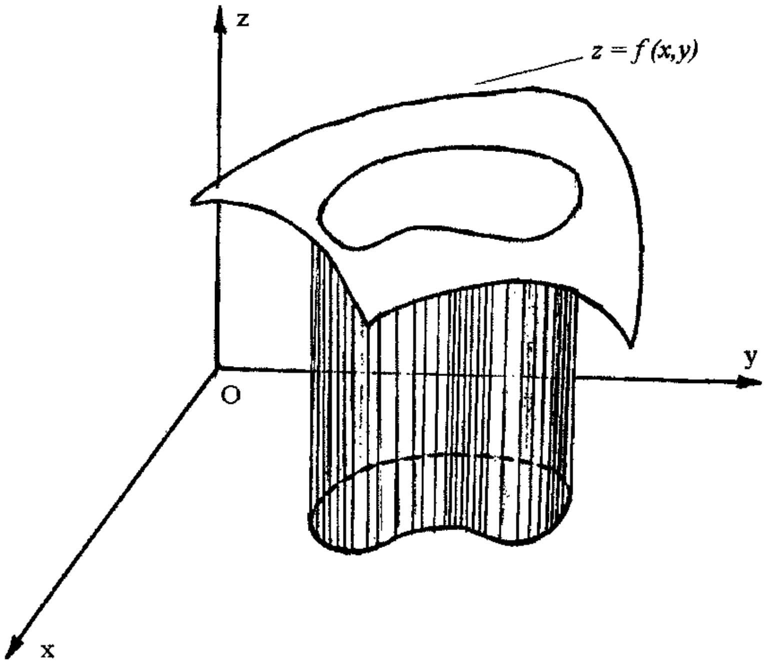


Рис. 4.1

З а д а ч а 4.1. Обчислити об'єм тіл, що обмежені поверхнями:

а) $z = 4x^2 + 2y^2 + 1,\ x + y = 3,\ x = 0,\ z = 0$;

б) $y = x^2,\ y = 1,\ x + y + z = 4,\ z = 0$;

в) $z = y^2 - x^2,\ z = 0,\ y = \pm 2$.

Р о з в' я з а н н я: а) поверхня $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$ є еліптичний параболоїд, вісь симетрії якого є вісь Oz. Вона перетинає цю вісь у точці з координатами $(0;0;1)$. Поверхня $x + y = 3$ – площина, паралельна осі Oz. Рівняння $x = 0,\ z = 0$ описують координатні площини (рис. 4.2 а).

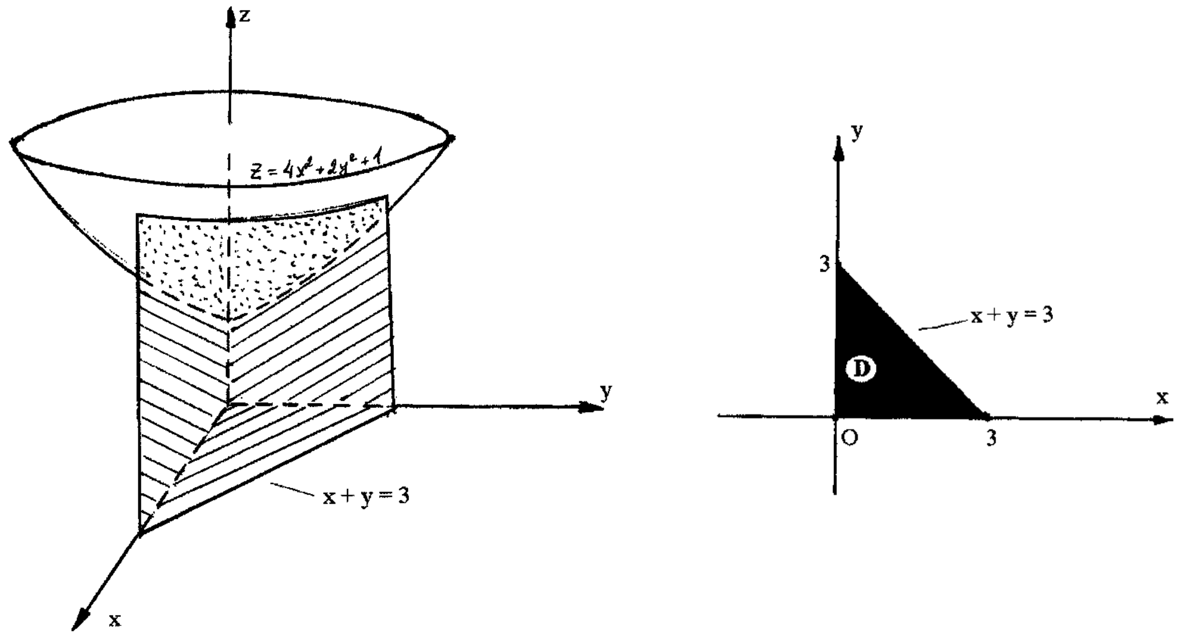
На площині Oxy це тіло проектується в трикутник, обмежений координатними осями і прямою $x + y - 3 = 0$ (рис. 4.2 б). Об'єм тіла обчислюється по формулі (4.1). Область інтегрування D є трикутник, а z заміняємо його значенням з рівняння тієї поверхні, що обмежує зверху тіло. З урахуванням (1.2), одержимо

$$V = \iint_D \left(4x^2 + 2y^2 + 1\right)dxdy = \int_0^3 dy \int_0^{3-y} \left(4x^2 + 2y^2 + 1\right)dx = \int_0^3 \left[\left(\frac{4}{3}x^3 + 2y^2 x + x\right)\Bigg|_0^{3-y}\right]dy =$$

$$= \int_0^3 \left[\frac{4}{3}(3-y)^3 + 2y^2(3-y) + 3 - y\right]dy = \int_0^3 \left[36 - 36y + 12y^2 - \frac{4}{3}y^3 + 6y^2 - 2y^3 + 3 - y\right]dy =$$

$$=\int_0^3\left[39-37y+18y^2-\frac{10}{3}y^3\right]dy=\left[39y-\frac{37}{2}y^2+6y^3-\frac{10}{12}y^4\right]\Bigg|_0^3=$$

$$=39\cdot 3-\frac{37}{2}\cdot 9+6\cdot 27-\frac{5}{6}\cdot 81=\boxed{45\,куб.од.}$$



а) б)

Рис. 4.2

Здійснимо перевірку знайденого результату, для цього скористаємося формулою (1.1).

$$V=\iint\limits_D\left(4x^2+2y^2+1\right)dxdy=\int_0^3 dx\int_0^{3-x}\left(4x^2+2y^2+1\right)dy=\int_0^3\left[\left(4x^2y+\frac{2}{3}y^3+y\right)\Bigg|_0^{3-x}\right]dx=$$

$$=\int_0^3\left[4x^2(3-x)+\frac{2}{3}(3-x)^3+3-x\right]dx=\int_0^3\left[12x^2-4x^3+18-18x+6x^2-\frac{2}{3}x^3+3-x\right]dx=$$

$$=\int_0^3\left[18x^2-\frac{14}{3}x^3+21-19x\right]dx=\left[6x^3-\frac{14}{12}x^4+21x-\frac{19}{2}x^2\right]\Bigg|_0^3=$$

$$=6\cdot 27-\frac{7}{6}\cdot 81+21\cdot 3-\frac{19}{2}\cdot 9=\boxed{45\,куб.од.}$$

Результати збіглися, виходить, для визначення об'єму тіла можна використовувати будь-який порядок інтегрування.

б) дане тіло являє собою вертикальний циліндр, що зверху обмежений частиною площини $z = 4 - x - y$, а знизу – частиною площини Oxy, укладеної між параболою $y = x^2$ і прямою $y = 1$ (рис. 4.3).

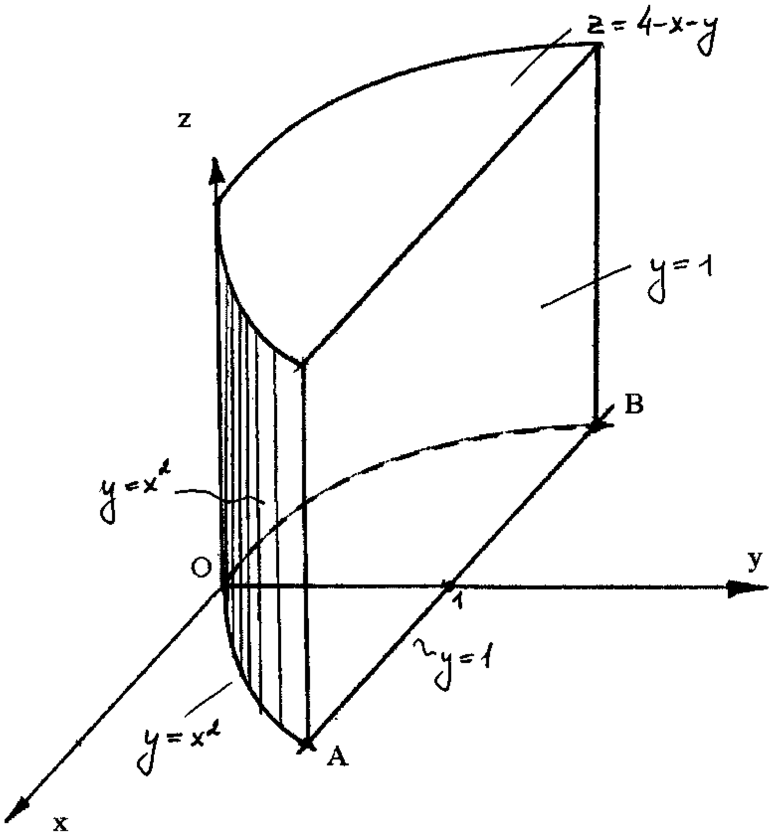


Рис. 4.3

Використовуючи формули (4.1) та (1.2), об'єм тіла дорівнює:

$$V = \iint\limits_{D} z dx dy = \iint\limits_{OAB} (4 - x - y) dx dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (4 - x - y) dx = \int\limits_0^1 \left[\left((4 - y)x - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \right] dy =$$

$$= 2\int\limits_0^1 (4 - y)\sqrt{y} dy = 8\int\limits_0^1 \sqrt{y} dy - 2\int\limits_0^1 y^{\frac{3}{2}} dy = 8\frac{y^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1 - 2\frac{y^{5/2}}{5/2}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{16}{3} y^{3/2}\Bigg|_0^1 - \frac{4}{5} y^{5/2}\Bigg|_0^1 = \frac{16}{3} - \frac{4}{5} = \boxed{\frac{68}{15} \text{куб. од.}}$$

Як перевірку, інтегрування по формулі (1.1) пропонується виконати самостійно.

в) гіперболічний параболоїд $z = y^2 - x^2$ перетинає площину Oxy ($z = 0$) по двох прямих $y = \pm x$. Разом із площинами $z = 0$, $y = \pm 2$ він обмежує тіло, симетричне щодо площин Oxz та Oyz. Відповідно до формул (4.1), (1.2) об'єм четвертої частини тіла, що розташована в першому октанті (рис. 4.4), дорівнює:

$$\frac{1}{4}V = \iint_D z dxdy = \iint_D \left(y^2 - x^2\right)dxdy = \int_0^2 dy \int_0^y \left(y^2 - x^2\right)dx = \int_0^2 \left[\left(y^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^y\right]dy =$$

$$= \int_0^2 \left(y^3 - \frac{y^3}{3}\right)dy = \left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^4}{12}\right)\Bigg|_0^2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \text{ куб. од.} \quad \boxed{V = \frac{32}{3} \text{ куб. од.}}$$

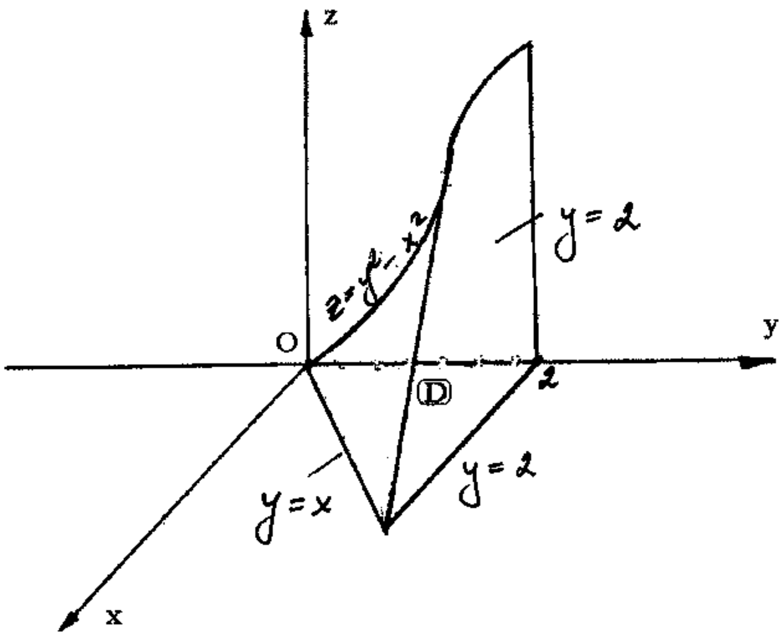


Рис. 4.4

Для перевірки, інтегрування по формулі (1.1) пропонується виконати самостійно.

З а д а ч а 4.2. Обчислити об'єм тіл, що обмежені поверхнями:

а) $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$;

б) $z = 4 - x^2 - y^2$, $2z = 2 + x^2 + y^2$.

Р о з в' я з а н н я: а) у даному випадку маємо справу з параболоїдом обертання $z = 4 - x^2 - y^2$, що має вершину в точці з координатами $(0;0;4)$, він проектується на площину Oxy ($z = 0$) в окружність $x^2 + y^2 = 4$ (рис. 4.5).

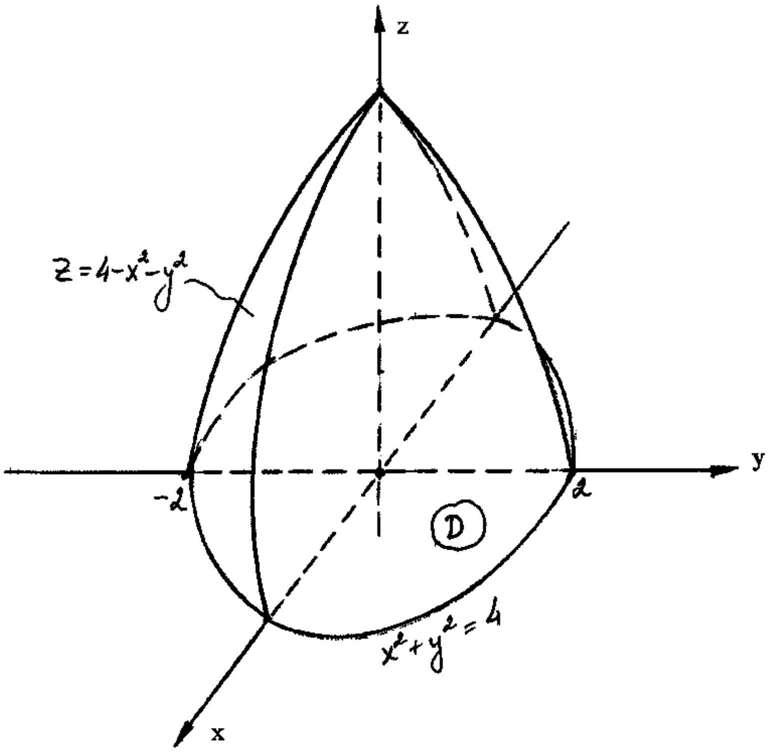


Рис. 4.5

Для визначення об'єму доцільно скористатися полярною системою координат.

Застосувавши формули (2.1). (2.2), одержимо:

$$V = \iint_D \left(4 - x^2 - y\right) dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(4 - \rho^2 \cos^2\varphi - \rho^2 \sin^2\varphi\right)\rho d\rho .$$

Виконаємо спочатку внутрішнє інтегрування по ρ:

$$\int_0^2 \left[4 - \rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\right]\rho d\rho = \int_0^2 \left(4\rho - \rho^3\right) d\rho = \left.\left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right)\right|_0^2 = 8 - 4 = 4 .$$

Тепер інтегруємо одержаний результат по φ:

$$4\int_0^{2\pi} d\varphi = 4\varphi\Big|_0^{2\pi} = \boxed{8\pi\ куб.од.}$$

б) дане тіло обмежено параболоїдами обертання. Його об'єм можна знайти, як різниця об'ємів двох вертикальних циліндричних тіл, що мають загальну нижню підставу D на площині Oxy, а зверху обмежені даними поверхнями (рис. 4.6).

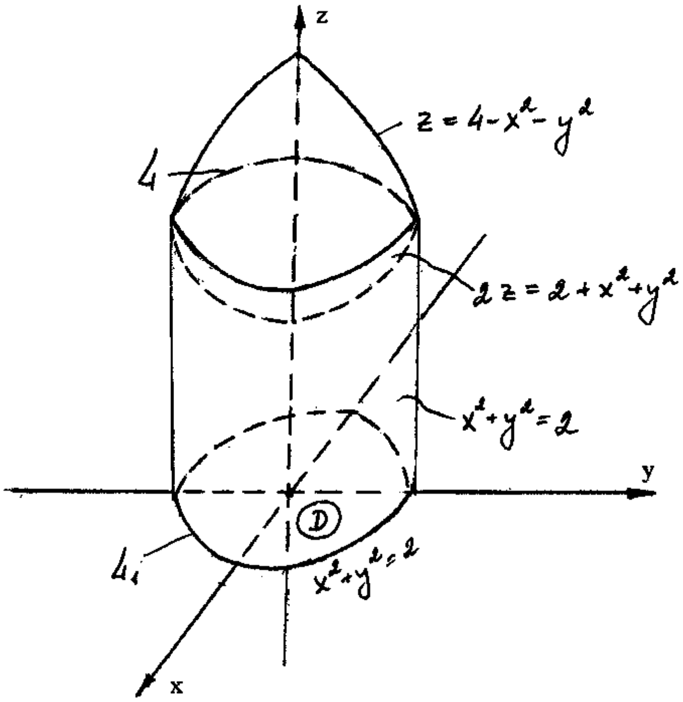


Рис. 4.6

Лінія L перетину даних поверхонь визначається системою з їх рівнянь:

$$\begin{cases} z=4-x^2-y^2, \\ 2z=2+x^2+y^2; \end{cases} \Rightarrow 8-2x^2-2y^2=2+x^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2=2.$$

Одержано рівняння вертикальної циліндричної поверхні, що проходить через лінію L і проектує її на площину Oxy. Одночасно, одержане рівняння буде і рівнянням проекції лінії L на площину Oxy – окружності L_1, що обмежує область D

$$V=V_1-V_2=\iint_D\left(4-x^2-y^2\right)dxdy-\iint_D\frac{1}{2}\left(2+x^2+y^2\right)dxdy=\frac{3}{2}\iint_D\left(2-x^2-y^2\right)dxdy.$$

Щоб спростити обчислення інтеграла, перетворимо його до полярних координат. Поклавши, що $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $dxdy=\rho d\rho d\varphi$, а рівняння лінії L_1: $x^2+y^2=2 \Rightarrow \rho=2$ $\left(0\le\varphi\le 2\pi\right)$, одержимо:

$$V=\frac{3}{2}\iint_D\left(2-\rho^2\right)\rho d\rho d\varphi=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\left(2\rho-\rho^3\right)d\rho=$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\left[\left(\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}\right]d\varphi=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{3}{2}\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=\boxed{3\pi\ куб.од.}$$

<u>Задачі для самостійного розв'язування</u>

<u>Обчислити об'єм тіла, яке обмежене поверхнями:</u>

а) циліндром $x^2+y^2=a^2$ і площинами $x+y+z=2a,\ z=0$; відповідь $\boxed{2\pi a^3\ куб.од.}$;

б) площинами $x+y+z=2,\ 3x+y=2,\ 3x+2y=4,\ y=0,\ z=0$; відповідь $\boxed{\frac{4}{9}куб.од.}$;

в) $x^2+y^2=9,\ z=5x,\ z=0$; відповідь $\boxed{90\,куб.од.}$;

г) $z=x^2,\ z=0,\ y=0,\ x+y=2$; відповідь $\boxed{\frac{4}{3}куб.од.}$;

д) $x^2+y^2=2y,\ z=4-x^2-y^2,\ z=0$; відповідь $\boxed{\frac{5\pi}{2}куб.од.}$

ЗАНЯТТЯ № 5. Криволінійні інтеграли, їх обчислення

Криволінійні інтеграли ***першого роду*** (по довжині дуги) не залежать від напрямку шляху інтегрування, і при їхньому обчисленні використовується одна з наступних формул:

1) якщо крива задана рівнянням $y=\varphi(x),\ (a\le x\le b)$ то

$$dl=\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}\,dx \text{ і } \int_L f(M)dl=\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}\,dx; \quad (5.1)$$

2) якщо крива задана в параметричному вигляді рівняннями $x=\varphi(t)$, $y=\phi(t),\ (\alpha\le t\le\beta)$, то

$$dl=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\phi'(t)]^2}\,dt \text{ і } \int\limits_L f(M)dl=\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t),\phi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\phi'(t)]^2}\,dt; \quad (5.2)$$

3) якщо крива задана в полярних координатах рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$ $(\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2)$, то

$$dl=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi \text{ и. } \int\limits_L f(M)dl=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi. \quad (5.3)$$

Криволінійні інтеграли ***другого роду*** (по координаті) залежать від вибору напрямку обходу кривої: якщо змінити напрямок обходу, то інтеграл по координатах змінює знак. При їхньому обчисленні використовується одна з наступних формул:

1) якщо крива задана рівнянням $y=\varphi(x)$, і при переміщенні з початкової точки в кінцеву, координата x міняється від a до b, то

$$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b[P(x,\varphi(x))+Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)]dx; \quad (5.4)$$

2) якщо крива задана в параметричному вигляді рівняннями $x=\varphi(t)$, $y=\phi(t)$, $(\alpha\le t\le\beta)$, то

$$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_\alpha^\beta[P(\varphi(t),\phi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\phi(t))\phi'(t)]dt. \quad (5.5)$$

У випадку замкнутої кривої звичайно беруть за додатний напрямок обходу кривої L таке, щоб область, що обмежена цією кривою, завжди залишалася ліворуч.

Позначення криволінійного інтеграла по замкнутому контурі:

$$\oint\limits_L f(M)dl \text{ або } \oint\limits_L Pdx+Qdy.$$

З а д а ч а 5.1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L\left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl$ від точки $A(-1;0)$ до точки $B(0;1)$:

а) по прямій AB;

б) по дузі астроїди $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$.

Р о з в' я з а н н я: а) оскільки ми маємо справу з криволінійним інтегралом першого роду, то спочатку складаємо рівняння лінії інтегрування – прямої AB, як рівняння прямої, що проходе через дві задані точки:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}\Rightarrow\frac{x+1}{0+1}=\frac{y-0}{1-0}\Rightarrow y-x=1.$$

Користаючися одержаним рівнянням і формулою (5.1), перетворимо даний криволінійний інтеграл у визначений інтеграл та обчислимо його:

$$y=1+x,\ y'=1,\ dl=\sqrt{1+1^2}\,dx=\sqrt{2}dx,$$

$$\int\limits_{x_A=-1}^{x_B=0}\left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{1+x}\right)\sqrt{2}dx=4\sqrt{2}\int\limits_{-1}^{0}x^{1/3}dx-3\sqrt{2}\int\limits_{-1}^{0}(1+x)^{1/2}\,d(1+x)=$$

$$=4\sqrt{2}\left.\frac{x^{4/3}}{4/3}\right|_{-1}^{0}-3\sqrt{2}\left.\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}\right|_{-1}^{0}=-3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\boxed{-5\sqrt{2}}.$$

б) перетворимо даний криволінійний інтеграл у визначений за допомогою формули (5.2), потім обчислимо його:

$$x=\cos^3 t\ ,\ dx=-3\cos^2 t\sin t dt;\ y=\sin^3 t,\ dy=3\sin^2 t\cos t;$$

$$dl=\sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t+9\sin^4 t\cos^2 t}dt=3\sin t\cos t dt\ .$$

Для визначення меж інтегрування необхідно зобразити астроїду і точки A, B (рис. 5.1).

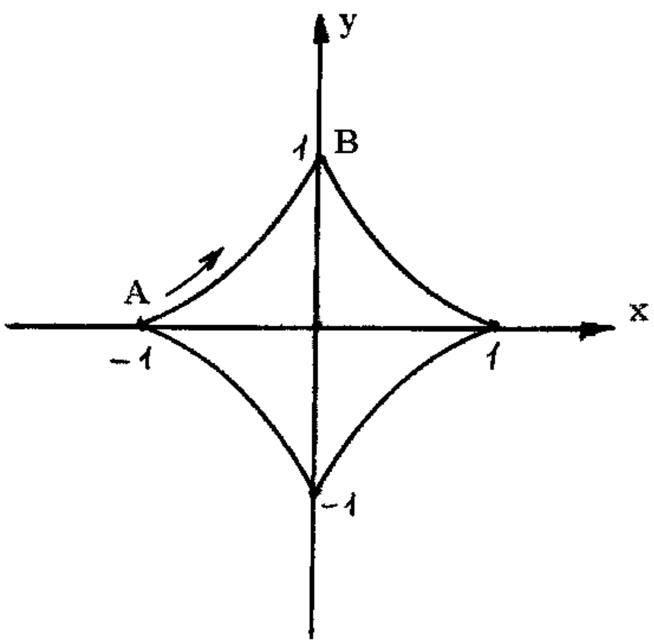


Рис. 5.1

$$\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos t-3\sqrt{\sin^3 t}\right)3\sin t\cos t dt=-12\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 td\left(\cos t\right)-9\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{5/2} td\left(\sin t\right)=$$

$$=-4\cos^3 t\Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{18}{7}\sin^{7/2} t\Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{-\frac{10}{7}}.$$

З а д а ч а 5.2. Обчислити $\int\limits_L xdl$, де $l-$ дуга параболи $x^2=2y$ від точки $O(0;0)$ до точки $A\left(\sqrt{8};4\right)$.

Р о з в' я з а н н я. Виконаємо малюнок (рис. 5.2).

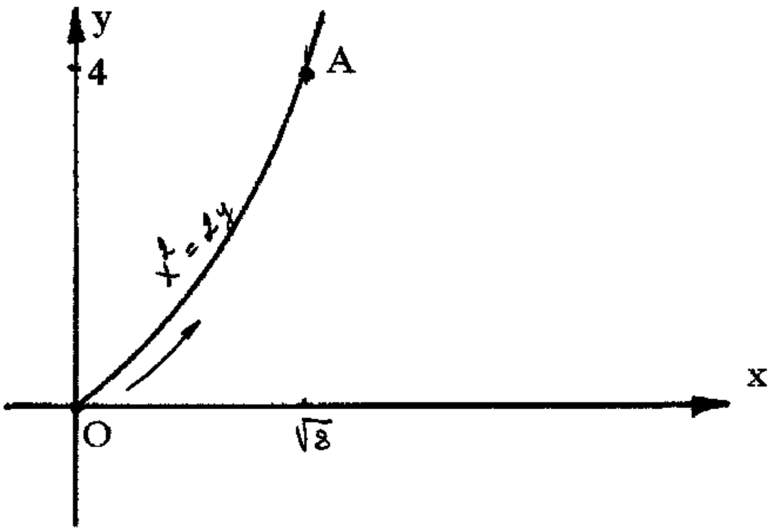


Рис. 5.2

Тут маємо справу з криволінійним інтегралом першого роду, а лінію зручно задати у формі, розв'язаної відносно y: $y=\dfrac{x^2}{2}$. Тоді по формулі (5.1), одержимо

$$\int\limits_L xdl=\int\limits_0^{\sqrt{8}}x\sqrt{1+x^2}dx=\frac{\left(1+x^2\right)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{8}}=\boxed{\frac{26}{3}}.$$

З а д а ч а 5.3. Обчислити $\int\limits_L xy\left(x^2+y^2\right)dl$, де $l-$ чверть окружності $x^2+y^2=R^2$, що лежить у першому квадранті.

Р о з в' я з а н н я. Перетворимо даний криволінійний інтеграл у визначений інтеграл. Для цього задамо дугу окружності параметричними рівняннями

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

і скористаємося формулою (5.2)

$$x'_t = -R\sin t,\ \ y'_t = R\cos t,\ \ dl = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\,dt = Rdt;$$

$$\int_L xy\left(x^2 + y^2\right)dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin t\cos t\left(R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t\right)Rdt =$$

$$= R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t dt = R^5\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{R^5}{2}}.$$

З а д а ч а 5.4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L (xy-1)dx + x^2 ydy$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$:

а) по дузі параболи $4x + y^2 = 4$;

б) по дузі еліпса $x = \cos t$. $y = 2\sin t$.

Р о з в' я з а н н я: а) у даній задачі маємо справу з криволінійним інтегралом другого роду. Для перетворення його у визначений інтеграл скористаємося формулою (5.4):

$$y = \sqrt{4-4x} = 2\sqrt{1-x},\ \ dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x}},$$

$$\int_1^0 \left(x2\sqrt{1-x} - 1\right)dx - 2x^2\sqrt{1-x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int_1^0\left(2x\sqrt{1-x} - 1 - 2x^2\right)dx =$$

$$= 2\int_1^0 x\sqrt{1-x}dx - \int_1^0 dx - 2\int_1^0 x^2 dx = -4\left.\left(\frac{(1-x)^3}{3} - \frac{(1-x)^5}{5}\right)\right|_1^0 - x\Big|_1^0 - \left.\frac{2}{3}x^3\right|_1^0 =$$

$$= -\frac{8}{15} + 1 + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{17}{15}}.$$

б) перетворимо даний інтеграл у визначений по змінній t, потім скориставшися формулою (5.5) обчислимо його. Значення параметра t в точках A і B знайдемо з даних параметричних рівнянь еліпса по відомих координатах цих точок.

$$x = \cos t,\ dx = -\sin t dt;\ y = 2\sin t,\ dy = 2\cos t dt;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t \cdot 2\sin t - 1)\cdot(-\sin t dt) + \cos^2 t \cdot 2\sin t \cdot 2\cos t dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\sin^2 t\cos t + \sin t + 4\cos^3 t\sin t\right) dt =$$

$$= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t d(\cos t) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t d(\sin t) =$$

$$= -4\frac{\cos^4 t}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}\sin^3 t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

З а д а ч а 5.5. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int_L x^2 dy + y^2 dx + x^2 dx - y dy\ ,$$

де L – лінія $y = |x|$ між точками $A(-1;1)$ і $B(2;2)$.

Р о з в' я з а н н я. Тут заданий криволінійний інтеграл другого роду (по координатах). Побудуємо лінію інтегрування між заданими точками (рис. 5.3).

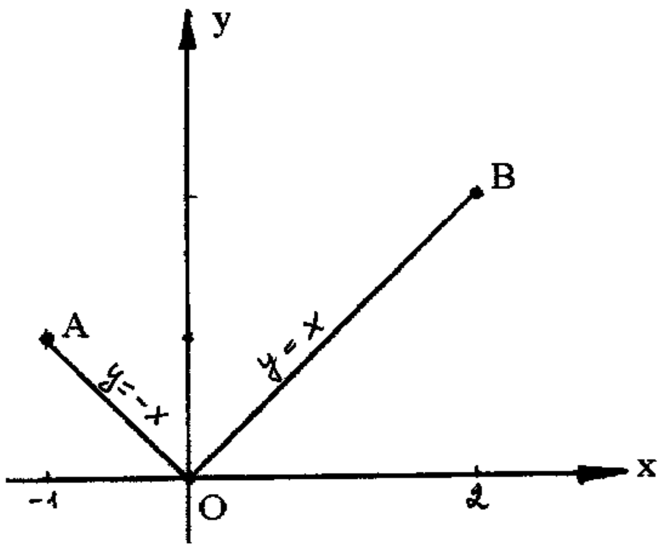


Рис. 5.3

Групуємо доданки, що містять dx і dy:

$$\int_L \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y\right)dy .$$

Лінія інтегрування розбивається на два відрізки [-1;0] та [0;2] для кожного з них застосуємо формулу (5.4), у результаті одержимо:

$$\int_L \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y\right)dy = \int_{-1}^{0}\left[x^2 + x^2 - \left(x^2 + x\right)\right]dx + \int_0^2 \left(x^2 + x^2 + x^2 - x\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(x^2 - x\right)dx + \int_0^2\left(3x^2 - x\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(x^3 - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 8 - 2 = \boxed{\frac{41}{6}}.$$

<u>З а д а ч а 5.6.</u> Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $\oint_{-l} 2xdx - \left(x + 2y\right)dy$;

б) $\oint_l y\cos xdx + \sin xdy$.

<u>Р о з в’ я з а н н я:</u> а) у цій задачі (рис. 5.4) лінія інтегрування (замкнута) складається з трьох відрізків, що лежать на різних прямих (з різними рівняннями). У цьому випадку криволінійний інтеграл по ламаній $ABCA$ обчислюємо, як суму інтегралів, узятих по відрізках AB, BC, CA.

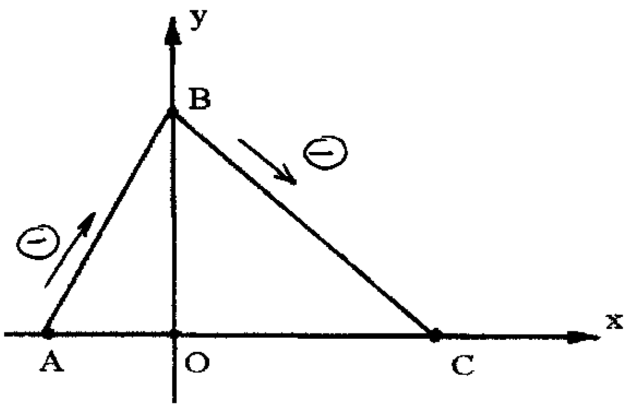


Рис.5.4

Складемо рівняння прямої AB: $y - 2x = 2$, і виходячи з цього рівняння, перетворимо криволінійний інтеграл на AB у визначений інтеграл по формулі (5.4)

$$\int_{AB} 2xdx - \left(5x + 4\right)2dx = -8\int_{-1}^{0}\left(x + 1\right)dx = -4\left(x + 1\right)^2\Big|_{-1}^{0} = -4.$$

Аналогічним чином (рис. 5.4) обчислюємо криволінійний інтеграл на відрізках BC, CA. Використовуючи формули (5.4), одержимо:

$$\int_{BC} 2xdx + (4-x)dx = \int_0^2 (x+4)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_0^2 = 10,$$

$$\int_{CA} 2xdx = 2\int_2^{-1} xdx = 2\frac{x^2}{2}\Bigg|_2^{-1} = 1 - 4 = -3.$$

Отже, $\oint_{-l} 2xdx - (x+2y)dy = -4 + 10 - 3 = \boxed{3}$.

б) тут підінтегральний вираз є повний диференціал функції двох змінних, тому що $(y\cos x)'_y = (\sin x)'_x = \cos x$. Унаслідок цього даний криволінійний інтеграл, узятий по периметрі даного трикутника (рис 5.4), дорівнює $\boxed{0}$. Він буде дорівнювати нулю і по будь-якому іншому замкнутому контурі.

<u>Задачі для самостійного розв'язування</u>

1. <u>Обчислити криволінійний інтеграл</u> $\int_{OA} y(x-y)dx + xdy$ <u>по лініях:</u>

   а) $y=2x$; відповідь: $\boxed{\frac{1}{3}}$; *б)* $y=2x^2$; відповідь $\boxed{\frac{31}{30}}$; *в)* $y^2=4x$, $O(0;0)$, $A(1;2)$; відповідь $\boxed{-\frac{18}{15}}$.

2. <u>Обчислити криволінійний інтеграл</u> $\int_{AB} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$ <u>по відрізку прямої</u> $x - 2y = 4$, $A(0;-2)$, $B(4;0)$. Відповідь: $\boxed{\ln\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$.

3. <u>Обчислити криволінійний інтеграл</u> $\int_{MN} 2y\sin 2xdx - \cos 2xdy$ <u>по будь-якій лінії</u>, $M\left(\frac{\pi}{4};2\right)$, $N\left(\frac{\pi}{6};1\right)$. Відповідь: $\boxed{-0.5}$.

4. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_{+C} 2x(y-1)dx + x^2 dy$ по контурі фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ і $y = 9$. Відповідь: $\boxed{0}$.

ЗАНЯТТЯ № 6. Обчислення деяких величин за допомогою криволінійного інтеграла

За допомогою криволінійних інтегралів можна обчислювати різні геометричні та фізичні величини.

Довжина дуги AB плоскої або просторової лінії обчислюється по формулі

$$L_{AB} = \int\limits_{AB} dl \,. \tag{6.1}$$

Площа фігури, яка розташована в площині Oxy й обмежена замкнутою лінією C

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{+C} xdy - ydx \,. \tag{6.2}$$

Маса матеріальної дуги AB

$$m = \int\limits_{AB} \delta(M)dl \,, \tag{6.3}$$

де $\delta(M)$ – лінійна щільність речовини в точці M дуги.

З а д а ч а 6.1. Знайти довжину дуги AB кривої $e^{2y}\left(e^{2x}-1\right)=e^{2x}+1$; $A(1;3)$, $B(2;5)$.

Р о з в' я з а н н я. Розв'яжемо рівняння відносно y:

$$e^{2y} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,, \qquad y = \frac{1}{2}\ln\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}.$$

Тепер крива задана рівнянням виду $y = f(x)$, тоді диференціал її дуги буде обчислюватися в такий спосіб $dl = \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$.

Визначимо $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\cdot\frac{2e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)-2e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)}{\left(e^{2x}-1\right)^2}=-\frac{2e^{2x}}{e^{4x}-1},$$

$$dl=\sqrt{1+\frac{4e^{4x}}{\left(e^{4x}-1\right)^2}}dx=\sqrt{\frac{e^{8x}-2e^{4x}+1+4e^{4x}}{\left(e^{4x}-1\right)^2}}dx=\frac{\sqrt{e^{8x}+2e^{4x}+1}}{e^{4x}-1}=\frac{e^{4x}+1}{e^{4x}-1}dx.$$

Використовуючи формулу (6.1), одержимо:

$$L_{AB}=\int_1^2\frac{e^{4x}+1}{e^{4x}-1}dx=\left|\begin{array}{l} e^{4x}=z,\ x=\dfrac{\ln z}{4},\ \ при\ x=1,\ z=e^4 \\ dx=\dfrac{dz}{4z},\ \ при\ x=2,\ z=e^8 \end{array}\right|=\underbrace{\frac{1}{4}\int_{e^4}^{e^8}\frac{z+1}{z-1}\cdot\frac{dz}{z}}_{см.вказівку}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[-\int_{e^4}^{e^8}\frac{dz}{z}+2\int_{e^4}^{e^8}\frac{dz}{z-1}\right]=\left(-\frac{1}{4}\ln|z|+\frac{1}{2}\ln|z-1|\right)\Bigg|_{e^4}^{e^8}=\frac{1}{2}\ln\frac{e^8-1}{e^4-1}-1=\boxed{\frac{1}{2}\ln\left(e^4+1\right)-1}.$$

Вказівка: $\dfrac{z+1}{z(z-1)}=\dfrac{A}{z}+\dfrac{B}{z-1}=\dfrac{A(z-1)+Bz}{z(z-1)}$; $z+1=Az-A+Bz$,

$$\begin{array}{l|l} z^1 & 1=A+B,\ B=2; \\ z^0 & 1=-A,\quad A=-1. \end{array}$$

З а д а ч а 6.2. Знайти довжину кардіоїди $x=2a\cos t-a\cos 2t$, $y=2a\sin t-a\sin 2t$.

Р о з в' я з а н н я. Тут крива задана параметричними рівняннями, тому dl – диференціал дуги буде визначаться таким чином.

$$dl=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt,\ x_t'=-2a\sin t+2a\sin 2t,\ y_t'=2a\cos t-2a\sin t,$$

$$dl=\sqrt{4a^2(\sin t-\sin 2t)^2+4a^2(\cos t-\cos 2t)^2dt}=$$

$$=2a\sqrt{\sin^2 t-2\sin t\sin 2t+\sin^2 2t+\cos^2 t-2\cos t\cos 2t+\cos^2 2t}dt=$$

$$=2a\sqrt{2-2(\sin t\sin 2t+\cos t\cos 2t)}dt=2a\sqrt{2-2\cos t}dt.$$

Тепер, скориставшися формулою (6.1), одержимо:

$$L_{AB}=2a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}dt=4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cdot 2\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=\boxed{16a}.$$

З а д а ч а 6.3. Знайти площу, яка обмежена замкнутою кривою $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Р о з в' я з а н н я. Тут маємо справу з еліпсом, рівняння якого записано в параметричній формі.

Перетворимо криволінійний інтеграл у визначений інтеграл із змінною t й обчислимо його, скориставшися формулою (6.2)

$$dx = -a\sin tdt\ ,\ dy = b\cos tdt,$$

$$S = \frac{1}{2}\oint_{+C} a\cos tb\cos tdt + b\sin ta\sin tdt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2}abt\Big|_0^{2\pi} = \boxed{\pi ab\ кв.од}.$$

З а д а ч а 6.4. Знайти площу, яка обмежена астроїдою $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Р о з в' я з а н н я. Перетворимо криволінійний інтеграл у визначений із змінною t й обчислимо його по формулі (6.2).

$$dx = -3a\cos^2 t\sin tdt\ ,\ dy = 3a\sin^2 t\cos tdt,$$

$$S = \frac{1}{2}\oint_{+C} a\cos^3 t3a\sin^2 t\cos tdt + a\sin^3 t3a\cos^2 t\sin tdt =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 tdt = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2 2t\right)dt = \frac{3a^2}{8}t\Big|_0^{2\pi} - \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 4t}{2}dt =$$

$$= \frac{3a^2\pi}{4} - \frac{3a^2}{16}t\Big|_0^{2\pi} - \frac{3a^2}{64}\sin 4t\Big|_0^{2\pi} = \frac{3a^2\pi}{4} - \frac{3a^2\pi}{8} = \boxed{\frac{3a^2\pi}{8}\ кв.од.}$$

З а д а ч а 6.5. Знайти масу дуги AB кривої $y = \ln x$, якщо в кожній її точці лінійна щільність пропорційна до квадрата абсциси точки $x_A = 1$, $x_B = 3$.

Р о з в' я з а н н я. Скористаємося формулою (6.3). Виходячи з даного рівняння кривої, перетворимо криволінійний інтеграл у визначений із змінною x

$$y'=\frac{1}{x}\ ,\ dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx\ ,\ \delta(M)=kx^2\ ,$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

$$m=\int\limits_{AB}\delta(M)dl=k\int\limits_1^3 x^2\,\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx=k\int\limits_1^3 x\sqrt{1+x^2}\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}1+x^2=z, & при\ x=1, z=2\\ xdx=\dfrac{dz}{2}, & при\ x=3, z=10\end{matrix}\right|=\frac{k}{2}\int\limits_2^{10} z^{1/2}dz=\frac{k}{2}\cdot\frac{z^{3/2}}{3/2}\Bigg|_2^{10}=k\,\frac{z^{3/2}}{3}\Bigg|_2^{10}=\boxed{9{,}6k}.$$

<u>Задачі для самостійного розв'язування</u>

1. Знайти довжину дуги кривої $x=2-\dfrac{t^4}{4},\ y=\dfrac{t^6}{6}$ між точками перетину її з осями координат.

Відповідь: $\boxed{\dfrac{13}{3}}$.

2. Знайти площу, яка обмежена петлею декартового листа $x^3+y^3-3axy=0$.

Відповідь: $\boxed{\dfrac{3a^2}{2}\,кв.од.}$

3. Знайти площу, що обмежена кривою $y^2=x^2-x^4$.

Відповідь: $\boxed{\dfrac{4}{3}\,кв.од.}$

4. Знайти масу дуги OA кривої $3y=2x\sqrt{x}$, якщо в кожній її точці M лінійна щільність пропорційна довжині дуги OM; $O(0;0)$, $A\left(4;\dfrac{16}{3}\right)$.

Відповідь: $\boxed{\dfrac{4}{9}k\left(63-5\sqrt{5}\right)}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика: основні означення, приклади і задачі: У двох книгах/ За редакцією Г.Л. Кулініча та І.П. Васильченка.– К.: Либідь, 1994.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: Вища шк., 1993.
3. Інтегрування: Навч. посібник-довідник тестів/ За редакцією Л.П. Кагадій, А.В. Павленко та ін. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 1993.
4. Запорожець Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1964.

ЗМІСТ